UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS – REGIONAL CATALÃO
UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM E OTIMIZAÇÃO

LÁZARO ANTÔNIO DA FONSECA JÚNIOR

Técnica de Redução de Modelos *Improved Reduced System Enriched* Aplicada ao Estudo do Comportamento de Sistemas Mecânicos Não Lineares

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

CATALÃO – GO, 2016

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[x] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor (a):	Lázaro Antônio da Fonseca Júnior				
E-mail:	jrlazaro@live.com				
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? [x]Sim [ ] Não					
Vínculo empregatício do autor	Bolsista				
Agência de fomento:	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior		Sigla: CAPES		
País:	Brasil	UF:GO		CNPJ:	
Título:	Técnica de Redução de Modelos *Improved Reduced System Enriched* Aplicada ao Estudo do Comportamento de Sistemas Mecânicos Não Lineares				
Palavras-chave:	Método dos elementos finitos, modelagem não linear, não linearidade localizada e geométrica, redução de modelos.				
Título em outra língua:	Reduction Technique models *Improved Reduced System Enriched* Applied to the Study of Systems Behavior Nonlinear Mechanics.				
Palavras-chave em outra língua:	Finite element method, nonlinear modeling, non linearity located and geometric, reduction models.				
Área de concentração:	Modelagem e Otimização				
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	08/03/2016				
Programa de Pós-Graduação:	Em Modelagem e Otimização				
Orientador (a):	Romes Antonio Borges				
E-mail:	kvtborges@gmail.com				
Co-orientador (a):*	Antônio Marcos Gonçalves de Lima				
E-mail:	amglima@mecanica.ufu.br				

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Lázaro Antônio da Fonseca Júnior Data: 08_ / 04_ / 2016__

Assinatura do (a) autor (a)

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

LÁZARO ANTÔNIO DA FONSECA JÚNIOR

Técnica de Redução de Modelos *Improved Reduced System Enriched* Aplicada ao Estudo do Comportamento de Sistemas Mecânicos Não Lineares

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Modelagem e Otimização pela Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão.

Orientador:
Romes Antonio Borges

Coorientador:
Antônio Marcos Gonçalves de Lima

CATALÃO – GO, 2016

Fonseca Júnior, Lázaro Antônio
Técnica de Redução de Modelos *Improved Reduced System Enriched* Aplicada ao Estudo do Comportamento de Sistemas Mecânicos Não Lineares [manuscrito]
/ Lázaro Antônio da Fonseca Júnior. - 2016.
xlii, 121 f.

Orientador: Prof. Dr. Romes Antonio Borges; co-orientador Dr. Antônio Marcos Gonçalves de Lima.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Regional Catalão , Catalão, Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Otimização, Catalão, 2016.
Bibliografia.
Inclui gráficos, tabelas, algoritmos.

1. Método dos elementos finitos. 2. modelagem não linear. 3. não linearidade localizada e geométrica. 4. redução de modelos. I. Borges,Romes Antonio, orient. II. De Lima, Antônio Marcos Gonçalves, co-orient. III. Técnica de Redução de Modelos *Improved Reduced System Enriched* Aplicada ao Estudo do Comportamento de Sistemas Mecânicos Não Lineares.

LÁZARO ANTÔNIO DA FONSECA JÚNIOR

TÉCNICA DE REDUÇÃO DE MODELOS *IMPROVED REDUCED SYSTEM ENRICHED* APLICADA AO ESTUDO DO COMPORTAMENTO DE SISTEMAS MECÂNICOS NÃO LINEARES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Otimização da Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão.

Trabalho **aprovado** em 08 de Março de 2016.

Prof. Dr. **Romes Antonio Borges**
IMTec/UFG/RC
Orientador

Prof. Dr. **Valder Steffen Jr.**
FEMEC/UFU
Membro Externo

Prof. Dr. **Marcelo Henrique Stoppa**
IMTec/UFG/RC
Membro Interno

Catalão – GO
2016

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por sempre estar comigo, protegendo-me, guiando-me e ensinando-me a ser uma pessoa cada vez melhor.

A Nossa Senhora Aparecida, por me amparar em todos os momentos de aflição e preocupação com o andamento da dissertação.

Agradeço a minha esposa, Nattany, que é o meu porto seguro, minha fonte de inspiração, sempre tão dedicada e amorosa, com o seu olhar carinhoso e suas palavras de entusiasmo, nunca me deixou abater e sempre me incentivando a continuar nesse longo caminho de pesquisador. Obrigado por sempre estar comigo, em todos os momentos.

Aos meus pais, Lázaro e Célia pelo exemplo de humildade, força e fé. Por acreditarem em mim e não medir esforços para que essa e outras conquistas fossem alcançadas.

Aos meus irmãos Lucas e Láufely, pela força, pelos momentos de alegria e acompanhamento á essa vitória.

Aos meu sogro Valdivino, minha sogra Terezinha e minha cunhada Bethânia, agradeço por toda força e confiança e palavras de conforto.

Ao meu orientador Romes, que muito me ensinou nessa caminhada desde a graduação. Que tenho para mim, um exemplo de profissional sério e dedicado, guerreiro e humilde, mostrando que é capaz de se chegar longe com muita humildade, foco e fé.

Ao meu coorientador Antônio Marcos, pelo apoio, cujos ensinamentos tornou-se mais rico o desfecho dessa jornada.

Aos meus irmãos de consideração, José Salviano, Daniel, Alcione e Tatiane, que juntos conseguimos vencer mais esse desafio de nossas vidas. Amizade essa que não se acaba aqui, será levada para a vida inteira.

As minhas primas Ludmila e Stefany, que juntos debatemos resultados, ajudando-se mutuamente. Aos colegas do Programa de Pós Graduação em Modelagem e Otimização (POSMOT), da UFG-Catalão e do doutorado da UFU pelo apoio e companheirismo em todas as horas.

Aos professores do POSMOT, que trabalharam fortemente para a minha formação.

A Universidade Federal de Goiás – Campus Catalão e a CAPES pelo suporte financeiro.

“Não julgue cada dia pela colheita que você obtém, mas pelas sementes que você planta.”
Robert Louis Stevenson

RESUMO

Fonseca Júnior, L. A. da. *Técnica de Redução de Modelos Improved Reduced System Enriched Aplicada ao Estudo do Comportamento de Sistemas Mecânicos Não Lineares*. 2016. 121 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem e Otimização) – Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão, Catalão – GO.

Atualmente, as estruturas estão cada vez mais diversificadas e complexas. Em muitos casos, essas estruturas são modeladas por métodos de aproximações numéricas, pois, devido à sua complexidade, o modelo analítico não existe ou não é viável. O método dos elementos finitos é um dos métodos de aproximação numérica mais utilizado. Assim, o modelo gerado pelo método dos elementos finitos é na maioria dos casos consideravelmente muito grande, e o tempo gasto para realizar simulações computacionais é alto. Neste contexto, os métodos de redução de modelos, tem sido estudados a fim de satisfazer a necessidade entre obter resultados precisos, mantendo as propriedades dinâmicas da estrutura, com menor tempo de processamento. Um estudo comparativo entre três métodos de redução será apresentado, a saber Improved Reduced System (IRS) e o método Iterative Improved Reduced System (IIRS). O terceiro método de redução, trata-se de um enriquecimento do método IRS, proposto pelo autor, que proporcionou grande melhora na economia de tempo durante as simulações. Esse método foi chamado Improved Reduced System Enriched (IRSE). Tais métodos de redução, foram aplicados em sistemas não lineares, com não linearidade localizada e não linearidade geométrica, devido a grandes deslocamentos.

Palavras- chaves: Método dos elementos finitos, modelagem não linear, não linearidade localizada e geométrica, redução de modelos.

ABSTRACT

Fonseca Júnior, L. A. da. *Técnica de Redução de Modelos Improved Reduced System Enriched Aplicada ao Estudo do Comportamento de Sistemas Mecânicos Não Lineares*. 2016. 121 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem e Otimização) – Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão, Catalão – GO.

Currently, the structures are increasingly diverse and complex. In many cases, these structures are model by numerical approximations methods because, due to its complexity, the analytical model does not exist or is not feasible. The finite element method is a numerical approximation methods most used. Thus, the model generated by the finite element method is in most cases considerably too large, and the time taken to perform computer simulations is high. In this context, models reduction methods, it has been studied to meet the need of accurate results while maintaining the dynamic properties of the structure with less processing time. A comparative study of three reduction methods will be presented, the Improved Reduced System (IRS) and the Iterative Improved Reduced System method (IIRS). The third reduction method, it is an enrichment of the IRS method proposed by the author, which provided great improvement in time savings during simulations. This method was called Improved Reduced System Enriched (IRSE). Such reduction methods were applied in non-linear systems with non-localized linear and geometric nonlinearity due to large displacements.

Keywords: Finite element method, nonlinear modeling, not linearity located and geometric, reduced models.

LISTA DE FIGURAS

Capítulo 2:

Figura 2. 1 Graus de Liberdade do elemento de viga de Euler-Bernoulli 28
Figura 2. 2:Funções de forma para a viga de Euler-Bernoulli..... 32
Figura 2. 3:Forças nodais 35
Figura 2. 4:Viga de Euler-Bernoulli com dois elementos 36
Figura 2. 5:Deslocamentos e rotações pra uma placa de Kirchhoff e Reissner-Mindlin 38
Figura 2. 6: Teoria de Kirchhoff..... 39
Figura 2. 7: Teoria de Reissner-Mindlin 40

Capítulo 3:

Figura 3. 1: Viga de Euler Bernoulli - (a) Conf.Inicial - (b) Conf.Linear - (c) Conf.Não Linear 57
Figura 3. 2: Resposta transiente da Viga de Euler-Bernoulli com não linearidade localizada. 58
Figura 3. 3: Plano de Fase da viga de Euler-Bernoulli com não linearidade localizada 59
Figura 3. 4: Resposta transiente da viga de Euler-Bernoulli com não linearidade localizada . 59
Figura 3. 5: Plano de Fase da viga de Euler-Bernoulli com não linearidade localizada 60
Figura 3 6: Viga de Euler-Bernoulli Escalonada..... 60
Figura 3. 7: Viga Escalonada: (a) Configuração Inicial – (b) Configuração Linear – (c) Configuração Não Linear 61
Figura 3. 8: Análise transiente da viga de Euler-Bernoulli escalonada..... 62
Figura 3. 9: Plano de fase – Viga de Euler-Bernoulli escalonada 62
Figura 3. 10: Placa sujeita a ação de uma força harmônica linear: (a) Configuração Inicial – (b) Configuração Linear – (c) Configuração Não Linear..... 64
Figura 3. 11: Análise transiente referente as configurações da Fig. 3.10. 64
Figura 3. 12: Plano de Fase referente a resposta obtida na Fig. 3.11. 65
Figura 3. 13: Placa sujeita a ação de força linear: (a) Configuração Inicial – (b) Configuração Linear – (c) Configuração Não Linear 65
Figura 3. 14: Análise transiente referente as configurações da placa apresentadas na Fig. 3.13. 66
Figura 3. 15: Plano de Fase referente a resposta apresentada pela Fig. 3.14. 66

Figura 3. 16: Sistema com (a) com onze molas lineares (Conf.Linear) e duas molas com característica não linear (Conf.Não Linear) - (b) com duas molas lineares (Conf.Linear) e duas molas com característica não linear (Conf.Não Linear) 67
Figura 3. 17: Placa sujeita a ação de forças pontuais: (a) Configuração Inicial – (b) Configuração com Molas Lineares – (c) Configuração com Molas Não Lineares 67
Figura 3. 18: Análise transiente referente as configurações da placa apresentadas na Fig. 3.17. 68
Figura 3. 19: Plano de Fase referente a resposta apresentada pela Fig. 3.18. 68
Figura 3. 20: : Placa sujeita a ação de força não linear: (a) Configuração Inicial – (b) Configuração com Molas Lineares – (c) Configuração com Molas Não Lineares 69
Figura 3. 21: Análise transiente da placa submetida a uma força não linear 69
Figura 3. 22: Plano de Fase referente a resposta apresentada pela Fig. 3.21. 70
Figura 3. 23: Grandes deslocamentos devido a flexão 71
Figura 3. 24: Viga de Euler-Bernoulli 77
Figura 3. 25: Força Linear : 1N - (a): Alumínio - (b) Acrílico 78
Figura 3. 26: Força Linear : 10N - (a): Alumínio - (b) Acrílico 78
Figura 3. 27: Força Linear : 50N - (a): Alumínio - (b) Acrílico 79
Figura 3. 28: Força Linear – 100N - (a): Alumínio - (b) Acrílico 80

Capítulo 4:

Figura 4. 1: Configurações da Viga de Euler – Bernoulli - (a) Configuração Inicial – (b) Configuração Linear – (c) Configuração Não Linear 83
Figura 4. 2: Métodos de Redução: Força Linear – Configuração Inicial 84
Figura 4. 3: Métodos de Redução: Força Linear – Configuração Linear 84
Figura 4. 4: Métodos de Redução: Força Linear – Configuração Não Linear 85
Figura 4. 5: Porcentagem do tempo de execução de cada método (a) Configuração Inicial – (b) Configuração Linear – (c) Configuração Não Linear 86
Figura 4. 6: Métodos de Redução: Força Não Linear – Configuração Inicial 87
Figura 4. 7: Métodos de Redução: Força Não Linear – Configuração Linear 88
Figura 4. 8: Métodos de Redução: Força Não Linear – Configuração Não Linear 89
Figura 4. 9: Porcentagem do tempo de execução de cada método (a) Configuração Inicial – (b) Configuração Linear – (c) Configuração Não Linear 90

Figura 4. 10:Viga Escalonada: (a) Configuração Inicial – (b) Configuração Linear – (c) Configuração Não Linear 91
Figura 4. 11: Métodos de Redução - Força Linear – Configuração Inicial 91
Figura 4. 12: Métodos de Redução - Força Linear - Conf.Linear 92
Figura 4. 13: Métodos de Redução - Força Linear – Configuração Não Linear 93
Figura 4. 14: Porcentagem do tempo de execução de cada método (a) Configuração Inicial – (b) Configuração Linear – (c) Configuração Não Linear 94
Figura 4. 15: Placa de Reissner-Mindlin sujeito a ação de uma força linear. (a) configuração inicial - (b) configuração linear- (c) configuração não linear 96
Figura 4. 16: Métodos de Redução - Força Linear - Conf. Inicial 96
Figura 4. 17: Métodos de Redução - Força Linear - Conf.Linear 97
Figura 4. 18: Métodos de Redução - Força Linear - Conf.Não Linear 97
Figura 4. 19: Porcentagem do tempo de execução de cada método (a) Configuração Inicial – (b) Configuração Linear – (c) Configuração Não Linear 98
Figura 4. 20: Métodos de Redução - Força Não Linear – Configuração Inicial 99
Figura 4. 21: Métodos de Redução - Força Não Linear - Conf. Linear 100
Figura 4. 22: Métodos de Redução - Força Não Linear - Conf. Não Linear 100
Figura 4. 23: Porcentagem do tempo de execução de cada método (a) Conf.Inicial – (b) Conf.Linear – (c) Conf.Não Linear 101
Figura 4. 24: Métodos IRS, IIRS e IRSE aplicados a viga de Alumínio com não linearidade geométrica – (a) F=1N (b) F=10N (c) F=50N (d) F=100N 104
Figura 4. 25: Métodos IRS, IIRS e IRSE aplicados a viga de Acrílico com não linearidade geométrica – (a) F=-1N¬ - (b) F=-10N – (c) F=-50N – (d) F=-100N 105
Figura 4. 26: Métodos IRS, IIRS e IRSE aplicados a viga de Acrílico com não linearidade geométrica – (a) F=1N (b) F=10N (c) F=50N (d) F=100N 106
Figura 4. 27: Porcentagem do tempo de execução para a viga de Acrílico- (a) F=1N (b) F=10N (c) F=50N (d) F=100N 107
Figura 4. 28: Métodos IRS, IIRS e IRSE aplicados a viga de Acrílico com não linearidade geométrica, cuja o cálculo da matriz de rigidez devido a não linearidade leva em conta os deslocamentos reduzidos (a) F=1N (b) F=10N (c) F=50N (d) F=100N 109
Figura 4. 29: Porcentagem do tempo de execução para a viga de Acrílico levando em conta que a matriz de rigidez devido a não linearidade geométrica é calculada com os deslocamentos reduzidos- (a) F=1N (b) F=10N (c) F=50N (d) F=100N 110

LISTA DE TABELAS

Capítulo 3:

Tabela 3. 1: Forças, propriedades físicas e geométricas da viga 57
Tabela 3. 2: Forças, propriedades físicas e geométricas da placa 63
Tabela 3. 3: Forças, propriedades físicas e geométricas da viga 77

Capítulo 4:

Tabela 4. 1: Forças, propriedades físicas e geométricas da viga 83
Tabela 4. 2: Forças, propriedades físicas e geométricas da placa 95
Tabela 4. 3: Forças, propriedades físicas e geométricas da viga 103

LISTA DE ALGORITMOS

Capítulo 3:

Algoritmo 3. 1: Newmark com Newton Raphson 56
Algoritmo 3. 2: Método de Newmark com Newton Raphson para sistemas com não linearidade geométrica 76

Capítulo 4:

Algoritmo 4. 1: Newmark com Newton Raphson utilizando métodos de redução de modelos 82
Algoritmo 4. 2: Método de Newmark com Newton Raphson utilizando métodos de redução em sistema com não linearidade geométrica 103
Algoritmo 4. 3: Método de Newmark com Newton Raphson utilizando redução de modelos em sistema com não linearidade geométrica 108

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO 23

2. INTRODUÇÃO A MODELAGEM DE ESTRUTURAS MECÂNICAS 27

2.1. MODELAGEM VIA MEF DE UMA ESTRUTURA DE VIGA DE EULER–BERNOULLI 27
2.1.1. DEFINIÇÃO DA FUNÇÃO DE APROXIMAÇÃO PARA OS DESLOCAMENTOS TRANSVERSAIS 29
2.1.2. OBTENÇÃO DAS MATRIZES DE MASSA E RIGIDEZ DO ELEMENTO DE VIGA 32
2.1.3. FORMULAÇÃO GLOBAL DA EQUAÇÕES DO MOVIMENTO DA VIGA 36
2.2 MODELAGEM DE UMA PLACA DO TIPO REISSNER-MINDLIN 37
2.1.1 MODELAGEM VIA MÉTODOS DOS ELEMENTOS FINITOS 41
2.3. INTRODUÇÃO AOS MÉTODOS DE REDUÇÃO DE MODELOS 46
2.3.1. PROCESSO DE REDUÇÃO 49
2.3.2. IMPROVED REDUCED SYSTEM (IRS) 49
2.3.3 ITERATIVE IMPROVED REDUCED SYSTEM (IIRS) 51
2.3.4 IMPROVED REDUCED SYSTEM ENRICHED (IRSE) 51

3. INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE SISTEMAS MECÂNICOS NÃO LINEARES 53

3.1 MODELAGEM DE UMA ESTRUTURA COM NÃO LINEARIDADE FÍSICAS LOCALIZADAS 54
3.1.1 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS ENVOLVENDO UMA VIGA DE EULER-BERNOULLI COM NÃO LINEARIDADE LOCALIZADA 57
3.1.2 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS DE UMA VIGA COM ESPESSURA VARIADA E NÃO LINEARIDADES LOCALIZADAS 60
3.1.3 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS ENVOLVENDO UMA PLACA DE REISSNER-MINDLIN COM NÃO LINEARIDADE LOCALIZADA 63
3.2 MODELAGEM DE UMA ESTRUTURA DO TIPO VIGA, COM NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA 70
3.2.1. SIMULAÇÃO DE VIGA COM NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA 76

4. APLICAÇÃO DOS MÉTODOS DE REDUÇÃO DE MODELOS 81

4.1. VIGA DE EULER-BERNOULLI 82

4.2. PLACA DE REISSNER-MINDLIN 95
4.3. VIGA COM NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA 102

CONCLUSÃO 112

CITAÇÕES E REFERÊNCIAS 115

Capítulo 1

1. INTRODUÇÃO

Em geral, qualquer sistema mecânico está sujeito a vibrações (oscilações que se repetem em um intervalo de tempo).

De acordo com Rao (2008), os sistemas mecânicos são constituídos de um meio para armazenar energia cinética (massa/inércia), de um meio para armazenar energia potencial (mola/elasticidade) e de um meio de dissipação gradual de energia (amortecimento).

Com a evolução do dimensionamento de estruturas, mais leves, resistentes e esbeltas, sujeitas a níveis de vibrações mais importantes, necessita-se que a modelagem seja cada vez mais confiável.

A formulação analítica desenvolvida ao longo do tempo é baseada na integração ou derivação das leis fundamentais da dinâmica, mas com a complexidade das novas estruturas, tona-se difícil ou até mesmo inviável a obtenção de soluções analíticas. Nesse sentido, tornou-se de grande importância, a obtenção de soluções aproximadas, sendo que alguns métodos fornecem soluções confiáveis e próximas de observações experimentais. Um dos principais métodos utilizados em modelagem de estruturas é o Método dos Elementos Finitos (MEF).

O MEF é um método numérico, cujo principal objetivo é transformar um problema contínuo em um problema discreto, ou seja, contendo um número finito de variáveis, que são analisadas em um sistema de equações algébricas (FARIA, 2006; ZIENKIEWICZ et al, 2005).

Este método se configura como sendo um dos mais poderosos no que diz respeito à análise estrutural de engenharia. Isto se deve tanto pela sua simplicidade e robustez quanto pela fácil adaptação a diferentes tipos de estruturas, com diferentes geometrias, condições de contorno e carregamento.

No entanto, as aplicações desse método dependerão, em muitos casos, de como o modelo físico real é representado pelo modelo matemático, devido à complexidade de estruturas de engenharia reais, e pelo fato de o modelo aproximado de elementos finitos conter erros de modelagem e não poder representar as estruturas reais perfeitamente, especialmente para os recursos na média e alta frequência de vibração (SALIBA, 2007; LIMA JR, 1999; FARIA, 1995).

Devido a esse fato, as estruturas são modeladas com milhares de graus de liberdade, para aumentar a precisão do modelo com relação ao problema real, porém, isto compromete o custo computacional.

De acordo com Bandan (2010), o MEF é tradicionalmente utilizado em problemas de mecânica dos sólidos e de transferência de calor em regimes permanentes e transientes.

O estudo de estruturas e sistemas como vigas e placas, principalmente no que diz respeito à análise linear, é comumente estudado. Uma viga é um elemento estrutural onde o comprimento é mais representativo do que a largura e a espessura, podendo suportar tanto cargas axiais quanto transversais. Já as placas são elementos estruturais bidimensionais, onde a espessura é bem menor em relação à largura e ao comprimento.

Na modelagem de estruturas por meio de vigas, destacam-se a viga de Euler-Bernoulli e a viga de Timoshenko.

A teoria de Euler-Bernoulli despreza os efeitos da deformação por cisalhamento, ou seja, considera-se que a reta normal ao plano médio antes da deformação permanece normal ao plano médio após a deformação, não havendo variação da espessura durante a deformação. Assim, os efeitos da inércia de rotação e cisalhamento são desprezados.

Já a teoria de Timoshenko considera os efeitos da inércia de rotação e cisalhamento, ou seja, a reta normal ao plano médio da viga indeformada permanece reta, mas não necessariamente normal ao plano médio da viga deformada.

Para o caso de placas, duas das principais modelagens utilizadas na literatura são as de Kirchhoff e Reissner-Mindlin, enquanto a primeira leva em consideração a teoria de Euler-Bernoulli, a segunda inclui os efeitos das deformações do corte transverso, assim como a teoria de Timoshenko (ROCHA, 2004; LIMA JUNIOR, 1999; SANCHES, 1998).

Com o grande avanço no desenvolvimento de novos materiais cada vez mais leves, que proporcionam a construção de estruturas mais resistentes às ações de fenômenos externos, cresce a importância de incluir efeitos relativos aos materiais que apresentam algum tipo de não linearidade no cálculo estrutural. Quando é utilizada uma formulação para análise linear, considera-se que as forças são aplicadas à estrutura em sua geometria inicial, e que as deformações são tão pequenas que não afetam os esforços internos da estrutura, podendo ser desprezadas.

Dessa maneira, a condição de equilíbrio é determinada com as forças atuando na estrutura indeformada, o que, para determinados casos, representa uma aproximação aceitável do seu comportamento.

Quando é adotada uma formulação não linear, considera-se que os deslocamentos afetam as forças atuantes nos componentes estruturais. Portanto, a condição de equilíbrio deve ser escrita para a condição deformada da estrutura. Desta maneira, a rigidez varia de acordo com as deformações e, assim, a matriz de rigidez varia em função dos deslocamentos impostos por forças externas à estrutura (ALVARENGA, 2005).

Na análise dinâmica não-linear por elementos finitos envolvendo grandes deslocamentos e materiais não-lineares, é necessário recorrer a uma formulação incremental das equações de movimento. Várias formulações são utilizadas na prática. Alguns procedimentos são gerais e outros são restritos a não-linearidades geométricas ou a formulação só pode ser aplicável a certos tipos de elementos (BATHE et al, 1975).

A análise estrutural dinâmica, envolvendo grandes deslocamentos, grandes deformações e materiais não-linearidades só é possível graças aos recentes avanços nas formulações e técnicas computacionais. Na maioria dos casos, uma representação de elementos finitos da estrutura é utilizada e, obviamente, a eficácia do cálculo depende muito da formulação apropriada dos elementos finitos não lineares (BORRI e MERLINE, 1986).

A imprevisibilidade da natureza pode levar a sistemas com características não lineares a falhas catastróficas. Na engenharia civil, por exemplo, em eventos esportivos e concertos, as arquibancadas estão sujeitas a oscilações não lineares devido ao afrouxamento das articulações e ao movimento das multidões; na indústria aeroespacial, o movimento não-linear pode ter consequências graves sobre a vida útil das peças. Em uma aeronave, além de interação não linear entre fluido e estrutura, não linearidades estão presentes na folga e fricção de superfícies e juntas de controle, e efeitos de saturação em atuadores hidráulicos. Em sistemas mecatrônicos, fontes de não linearidades são atritos nos rolamentos e guias, bem como a folga nas articulações do robô. Na indústria automotiva, o sistema de travamento e sistema de suspensão do motor tem um comportamento altamente não-linear, envolvendo o uso de materiais viscoelásticos, que possuem comportamento não linear e são fortemente dependente da temperatura. Não linearidades também podem surgir numa estrutura danificada: fissuras de fadiga, rebites e parafusos (GERGES, 2013; KERSCHEN, 2006).

Devido ao tamanho das matrizes geradas através dos métodos dos elementos finitos, a utilização dos métodos de redução de modelos torna-se uma boa opção para se tratar o problema de maneira que se tenha um menor custo computacional.

A grande motivação para o estudo e desenvolvimento de técnicas de redução de modelo é diminuir a dimensão do problema em questão, a fim de obter resultados precisos quando comparados com o sistema original, porém, com ganho de tempo computacional.

As técnicas de redução de modelo têm sido amplamente utilizadas na área de reanálise e otimização dinâmica estrutural, problemas de vibração estrutural e flambagem, detecção de danos, estudos de sensibilidade e parâmetros de controle, em problemas não estruturais relacionados à transferência de calor e a interação fluido-estrutura (QU, 2004).

A seguir, no Capítulo 2, será apresentada a modelagem de uma viga de Euler-Bernoulli e de uma placa de Reissner-Mindlin através do MEF. Além disso, é feita uma introdução sobre alguns métodos de redução disponíveis na literatura, bem como, a equação para calcular a matriz de transformação dos métodos estudados neste trabalho.

No Capitulo 3, o estudo de sistemas mecânicos não lineares é apresentado. É descrita a modelagem de um sistema com não linearidade localizada e um sistema com não linearidade geométrica, devido a grandes deslocamentos. São apresentados nesse capítulo, diferentes simulações, a fim de verificar a influência da presença da não linearidade no sistema.

No Capítulo 4, os métodos de redução apresentados no Capítulo 2, são aplicados a uma viga de Euler-Bernoulli e a uma placa de Reissner-Mindlin, com o acoplamento de molas lineares e de molas não lineares (não linearidade localizada), assim como para uma viga de Euler-Bernoulli com não linearidade geométrica, devido a grandes deslocamentos.

Em seguida, é feita a conclusão dos resultados obtidos e as perspectivas de trabalhos futuros.

Capítulo 2

2. INTRODUÇÃO A MODELAGEM DE ESTRUTURAS MECÂNICAS

Na modelagem e discretização de estruturas em problemas práticos de engenharia, regidos por equações diferenciais, técnicas de análise numérica são requeridas para a obtenção de soluções aproximadas, uma vez que esses problemas são de grande complexidade e soluções analíticas em forma fechada são inviáveis e até mesmo impossíveis (REDDY, 1993).

Na maioria das vezes, a modelagem de sistemas mecânicos e estruturais envolvem elementos mais simples, como treliças, vigas, pórticos e placas, como, por exemplo, a modelagem de telhados, torres de antenas, pontes, máquinas de elevação, estruturas de automóveis, máquinas rotativas, dentre outras. A análise de sistemas estruturais envolvendo estes elementos pode ser feita de maneira eficiente, usando o Método dos Elementos Finitos, conhecido como MEF.

O MEF pode ser aplicado em diferentes áreas, sendo que, neste capítulo, o enfoque será a mecânica estrutural, com a modelagem de estrutura de elementos do tipo viga e placa.

2.1. Modelagem via MEF de uma Estrutura de Viga de Euler–Bernoulli

A teoria de Euler-Bernoulli é muito utilizada na análise de estruturas lineares. Essa teoria desconsidera as deformações por cisalhamento (CASTRO, 2009, REDDY, 1993).

Na modelagem de estruturas do tipo viga de Euler-Bernoulli, considera-se que o plano normal ao eixo neutro antes da deformação permanece normal ao eixo após a deformação. Essa consideração significa que os segmentos das normais permanecem com o mesmo comprimento e, portanto, não há variação da espessura durante a deformação (ZIENKIEWICZ et al. 2005).

Não havendo variação da espessura durante a deformação, os efeitos de inércia de rotação e cisalhamento são desprezados. Dessa forma, considera-se que as estruturas permanecem planas e ainda perpendiculares ao eixo após a deformação do elemento estrutural.

Outra teoria bastante utilizada na literatura é a teoria de Timoshenko, a qual, sempre que a viga analisada for espessa, ou seja, sempre que a relação espessura/comprimento da seção transversal não for pequena, a deformação cisalhamento é importante na caracterização do comportamento do elemento estrutural e deve ser utilizada. A consideração da deformação por corte tende a facilitar visivelmente a construção da aproximação para os campos de deslocamentos em cada um dos elementos finitos (BATHE, 1996).

A modelagem via MEF, requer que a estrutura seja discretizada em um conjunto finito de elementos para que se possa definir uma aproximação para o campo de deslocamentos.

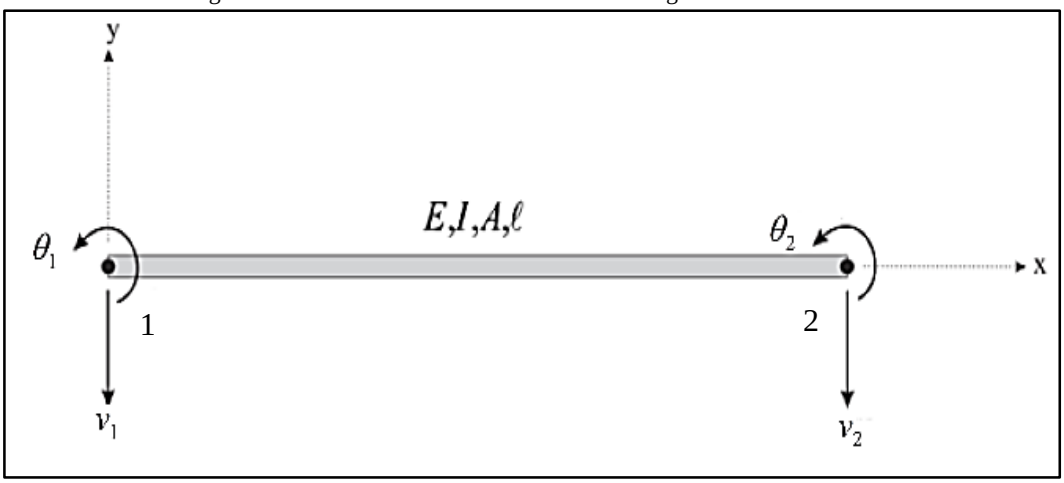
Para elementos de treliças, onde se considera somente o carregamento axial, esses deslocamentos são aproximados por uma função linear.

Para vigas, onde se considera deslocamentos transversais e rotações, a aproximação por uma função linear não é válida, pois os deslocamentos transversais e as rotações (primeira derivada) devem ser contínuos em todo o domínio da estrutura, o que não acontece com uma aproximação linear. (CASTRO,2009; SANCHES, 1998)

Nesse sentido, a aproximação para o elemento de viga é feita utilizando um polinômio interpolador, cujo grau está relacionado com a quantidade de graus de liberdade considerados.

Na Fig. 2.1, considera-se uma viga no plano *xy*, de comprimento *l*, *E* é o módulo de elasticidade longitudinal do material do qual a viga é formada, *I* é o momento de inércia e *A* é a área da seção transversal (ZIENKIEWICZ et al. 2005; REDDY, 1993).

Figura 2. 1 Graus de Liberdade do elemento de viga de Euler-Bernoulli



Fonte: Adaptado Reddy (1993)

2.1.1. Definição da Função de Aproximação para os Deslocamentos Transversais

A equação diferencial da viga é dada pela Eq. (2.1) (CASTRO,2009; ZIENKIEWICZ et al. 2005; REDDY, 1993):

$$EI\frac{d^4\widetilde{v}(x)}{dx^4} = F(x) \tag{2.1}$$

Sendo $\widetilde{v}$ a função do deslocamento transversal em direção ao eixo y.

Pelo MEF, a subdivisão do domínio infinito dimensional para um domínio finito dimensional, implica que um número *n* de elementos seja gerado.

Primeiramente, a modelagem é feita a nível elementar (utiliza-se apenas um elemento de viga) e posteriormente elevada ao nível global (a junção dos *n* elementos no qual a viga foi subdividida). Ainda, de acordo com a Fig. 2.1, cada elemento contém dois nós, representado pelos números 1 e 2.

Os graus de liberdade referentes aos deslocamentos transversais são representados por v_1 e v_2, e as rotações das seções transversais são dadas por θ_1 e θ_2. Desse modo, os graus de liberdade podem ser reunidos no vetor dado pela Eq. (2.2):

$$\{u_i\} = \begin{bmatrix} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 \end{bmatrix}^T \tag{2.2}$$

De acordo com a teoria de Euler-Bernoulli, a relação entre as rotações das seções transversais e os deslocamentos transversais da viga podem ser expressos conforme a Eq. (2.3):

$$\theta_i(t) = \frac{\partial\widetilde{v}_i(x)}{\partial x} \tag{2.3}$$

A função de interpolação utilizada é um polinômio, no qual o seu grau está relacionado com a quantidade de graus de liberdade em um elemento. Nesse caso tem-se duas rotações e dois deslocamentos transversais. Assim o polinômio utilizado é de grau três, contendo quatro incógnitas c_1, c_2, c_3, c_4:

$$\tilde{v}_i(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 \tag{2.4}$$

As rotações das seções transversais são representadas pela Eq. (2.5).

$$\tilde{\theta}_i(x) = c_2 + 2c_3 x + 3c_4 x^2 \qquad (0 \le x \le l_i) \tag{2.5}$$

De acordo com Urugal (1981), a função de aproximação dada pela Eq. (2.4) preserva a continuidade das deflexões, mas não das inclinações ao longo da superfície do elemento; porém, para fins práticos, a precisão baseada nessa equação é aceitável.

Utilizando as Eqs. (2.4) e (2.5), tem-se os pontos nodais:

$$\begin{cases} \tilde{v}_i(0) = v_1 = c_1 & \tilde{v}_i(l) = v_2 = c_1 + c_2 l + c_3 l^2 + c_4 l^3 \\ \left.\dfrac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x}\right|_{x=0} = \theta_1 = c_2 & \left.\dfrac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x}\right|_{x=l} = \theta_2 = c_2 + 2c_3 l + 3c_4 l^3 \end{cases} \tag{2.6}$$

As constantes c_1, c_2, c_3, c_4 são determinadas pelos conjuntos de restrições.

Resolvendo as Eqs. 2.5 em relação às constantes c_1, c_2, c_3, c_4, tem-se:

$$\begin{cases} c_1 = v_1 \\ c_2 = \theta_2 \\ \\ c_3 = -\dfrac{3}{l^2} v_1 - \dfrac{2}{l} \theta_1 + \dfrac{3}{l^2} v_2 - \dfrac{1}{l} \theta_2 \\ c_4 = -\dfrac{2}{l^3} v_1 + \dfrac{1}{l^2} \theta_1 - \dfrac{2}{l^3} v_2 + \dfrac{1}{l^2} \theta_2 \end{cases} \tag{2.7}$$

Substituindo os valores das constantes encontradas na Eq. (2.7), na Eq. (2.2), tem-se:

$$\tilde{v}(x) = v_1 + \theta_1 x + \left[-\frac{3}{l^2}(v_1 - v_2) - \frac{1}{l}(2\theta_1 + \theta_2) \right] x^2 + \ldots \\ \ldots \left[\frac{2}{l^3}(v_1 - v_2) + \frac{1}{l^2}(\theta_1 + \theta_2) \right] x^3 \tag{2.8}$$

A Eq. (2.8), pode ser escrita em função dos graus de liberdade, conforme a Eq. (2.9).

$$\tilde{v}(x) = \frac{1}{l^3}\left(2x^3 - 3x^2 l + l^3\right) v_1 + \frac{1}{l^3}\left(x^3 l - 2x^2 l^2 + x l^3\right)\theta_1 \cdots \\ \ldots + \frac{1}{l^3}\left(-2x^3 + 3x^2 l\right) v_2 + \frac{1}{l^3}\left(x^3 l - x^2 l^2\right)\theta_2 \tag{2.9}$$

A partir da Eq.(2.9), tem-se as funções de forma, dadas por:

$$\begin{cases} \phi_1 = \frac{1}{l^3}\left(2x^3 - 3x^2 l + l^3\right) \\ \phi_2 = \frac{1}{l^3}\left(x^3 l - 2x^2 l^2 + x l^3\right) \\ \phi_3 = \frac{1}{l^3}\left(-2x^3 + 3x^2 l\right) \\ \phi_4 = \frac{1}{l^3}\left(x^3 l - x^2 l^2\right) \end{cases} \tag{2.10}$$

Dessa maneira, pode-se escrever a Eq. (2.9) em função das funções de forma dependentes do tempo:

$$\tilde{v}_i(x,t) = \phi_1(x) v_1(t) + \phi_2(x)\theta_2(t) + \phi_3(x) v_2(t) + \phi_4(x)\theta_2(t) \tag{2.11}$$

Ou

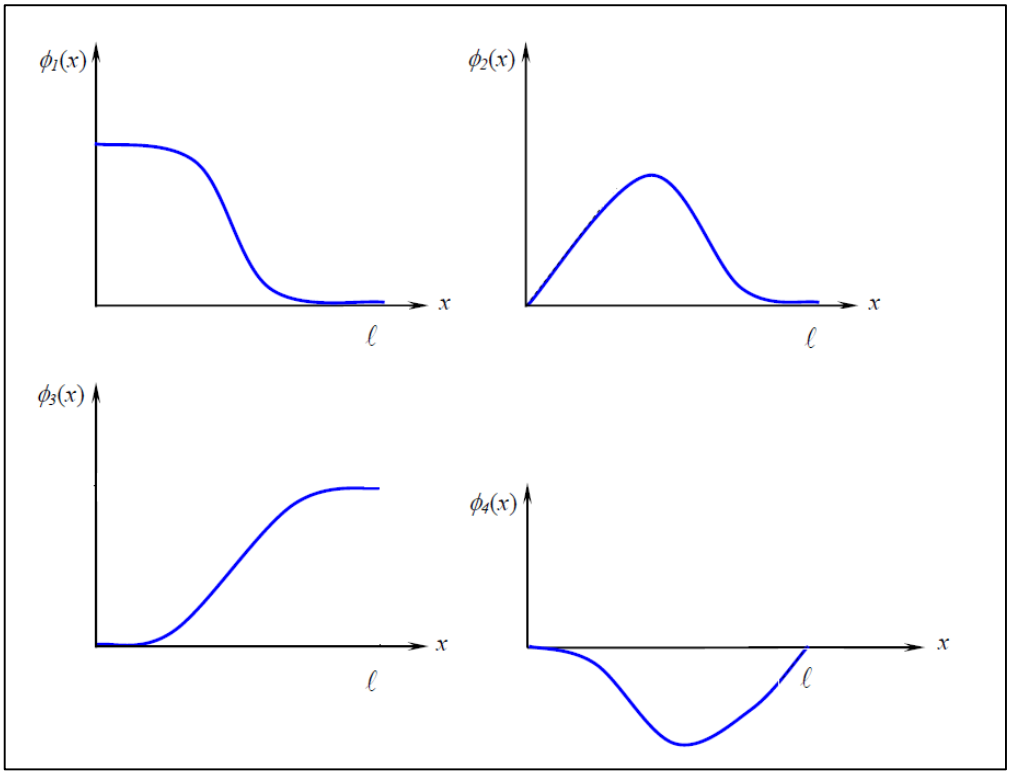
$$\tilde{v}_i(x,t) = [\phi(x)]\{u^{(e)}\} \tag{2.12}$$

As funções de forma $\phi_i(x)$ correspondem ao campo de deslocamentos transversais que se desenvolve através do elemento finito, quando se impõe um deslocamento nodal dependente de *i*, com o valor unitário $u_i^{(e)} = 1$, garantindo que os demais sejam nulos, ou seja, $u_k^{(e)} = 0$,

com $k \neq i$. Considera-se um referencial local de cada elemento, onde esse referencial é sempre o nó inicial do elemento, assim, $0 \leq x \leq l$.

A Fig. 2.2, representa as funções de forma associada a Eq. (2.11).

Figura 2. 2:Funções de forma para a viga de Euler-Bernoulli



Fonte: O autor

2.1.2. Obtenção das Matrizes de Massa e Rigidez do Elemento de Viga

Neste caso, será utilizado o Princípio Variacional de Hamilton, no qual calcula-se as energias cinética e potencial para encontrar as matrizes de massa e rigidez da viga. Outras formulações para encontrar a matriz de massa e rigidez podem ser encontradas em Zienkiewicz, et al. (2005), Rocha (2004), Barkanov (2001), Bathe (1996) e Fenner (1996).

A matriz de massa está relacionada com a energia cinética do sistema, dada pela Eq. (2.13).

$$T = \frac{1}{2}\int_0^l m_i \left(\frac{\partial \tilde{v}\ (x,t)}{\partial t} \right)^2 dx \qquad (2.13)$$

Substituindo a Eq. (2.11) na Eq. (2.13), e fazendo as derivações necessárias, tem-se:

$$T = \frac{1}{2}\left\{\dot{u}^{(e)}(t)\right\}^{T}\left[M^{(e)}\right]\left\{\dot{u}^{(e)}(t)\right\} \tag{2.14}$$

A qual:

$$\left[M^{(e)}\right]_{(4x4)} = \int_{0}^{l} m_i(x)\left[\phi(x)\right]^{T}\left[\phi(x)\right]dx \tag{2.15}$$

Sendo $[M^{(e)}]_{(4x4)}$ a matriz de massa ou matriz de inércia, a nível elementar do elemento de viga de Euler – Bernoulli. Se $m_i(x)$ for constante, efetuando os cálculos da Eq. (2.15), tem-se:

$$\left[M^{(e)}\right] = \frac{m\ l}{420}\begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l^2 \\ -13l & -3l^2 & -22l^2 & 4l^2 \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

Sendo $m = \upsilon A$, onde υ é a densidade do material e A é a área do elemento de viga.

A matriz de rigidez do elemento de viga pode ser obtida através da energia potencial, conforme a Eq. (2.17):

$$V = \frac{1}{2}\int_{0}^{l} E_i(x)I_i(x)\left[\frac{\partial^2 \tilde{v}\ (x,t)}{\partial x^2}\right]^2 dx \tag{2.17}$$

Após a derivação dupla da Eq. (2.11) com relação ao deslocamento, tem-se:

$$\left[K^{(e)}\right]_{(4x4)} = \int_{0}^{l} E_i(x)I_i(x)\phi''(x)\phi''(x)dx \tag{2.18}$$

Sendo $E_i(x)$ e $I_i(x)$ o modulo de elasticidade e o momento de inercia, respectivamente; a matriz de rigidez elementar é dada por:

$$\left[K^{(e)}\right]=\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & 6l \\ 6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

Aplicando o Princípio Variacional de Hamilton, desconsiderando a ação de forças externas, tem-se:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2}(L)dt = \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{1}{2}\left\{\dot{u}^{(e)}(t)\right\}^t\left[M^{(e)}\right]\left\{\dot{u}^{(e)}(t)\right\}-\left\{u^{(e)}(t)\right\}^t\left[K^{(e)}\right]\left\{u^{(e)}(t)\right\}\right)dt=0 \tag{2.20}$$

Onde, $L=T-V$.

No funcional dado pela Eq. (2.20) o tempo é a variável independente e os graus de liberdade $u^{(e)}$ são as variáveis dependentes.

As equações de Euler-Lagrange associadas ao funcional da Eq. (2.20) pode ser expressa como:

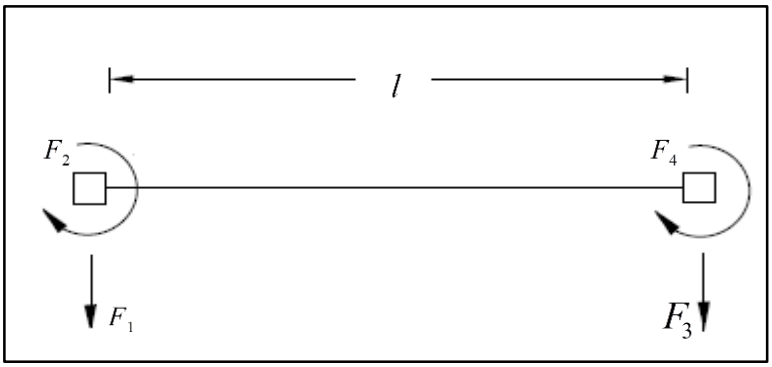
$$\frac{\partial L}{\partial\left\{u^{(e)}\right\}}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial\left\{u^{(e)}\right\}}\right)=\{0\} \tag{2.21}$$

Efetuando os cálculos da Eq. (2.21), tem-se a equações do movimento da viga de Euler-Bernoulli, dada por:

$$[M^{(e)}]\left\{\ddot{u}^{(e)}(t)\right\}+[K^{(e)}]\left\{u^{(e)}(t)\right\}=0 \tag{2.22}$$

A Eq. (2.22) não apresenta o vetor de forças nodais. Na Fig. 2.3 é apresentado o esquema das forças nodais aplicadas no elemento de viga.

Figura 2. 3:Forças nodais



Fonte: O autor

Dessa maneira, o vetor de forças nodais elementares é dado por:

$$F^{(e)} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} \tag{2.23}$$

E a equações do movimento agora pode ser reescritas na sua forma matricial como:

$$[M^{(e)}]\{\ddot{u}^{(e)}(t)\} + [K^{(e)}]\{u^{(e)}(t)\} = F^{(e)} \tag{2.24}$$

Sendo $[M^{(e)}]$, $[D^{(e)}]$, $[K^{(e)}]$ as matrizes elementares de massa, amortecimento e rigidez respectivamente. $\{F^{(e)}\}$ é o vetor elementar de força, e $\{u^{(e)}(t)\}$, $\{\dot{u}^{(e)}(t)\}$, $\{\ddot{u}^{(e)}(t)\}$ são os vetores elementares de deslocamento, velocidade e aceleração respectivamente.

A matriz de amortecimento $[D^{(e)}]$ é encontrada através do amortecimento proporcional de Rayleigh, dado por uma combinação linear entre a matriz de massa e rigidez.

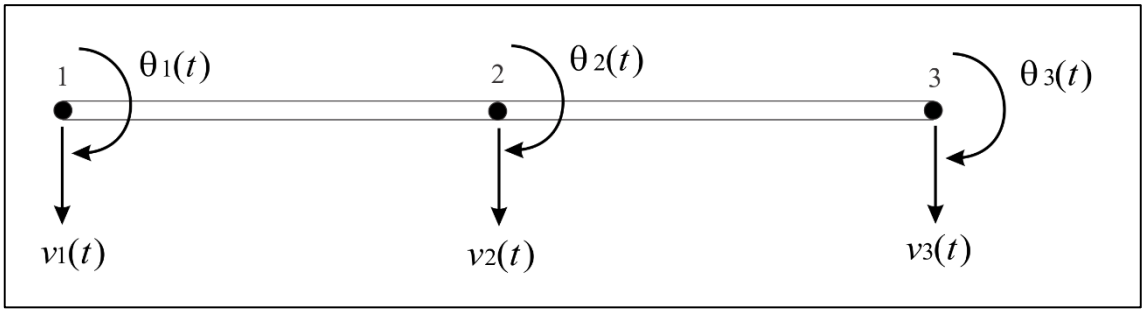
2.1.3. Formulação Global da equações do Movimento da Viga

Considerando que a viga pode ser discretizada em vários elementos finitos, a modelagem elementar apresentada na seção 2.1.2 deve ser elevada a nível global, preservando a conectividade entre cada elemento, o equilíbrio dinâmico e a continuidade dos deslocamentos.

Uma maneira de encontrar as matrizes de massa e rigidez global é estabelecendo transformações lineares, que relaciona os graus de liberdade locais com os graus de liberdade globais.

Considere agora dois elementos de viga, conforme a Fig. 2.4:

Figura 2. 4:Viga de Euler-Bernoulli com dois elementos



Fonte: O autor

Deve-se construir duas matrizes de transformação lineares, uma para cada elemento, permitindo localizar os graus de liberdade locais dentro dos graus de liberdade globais.
Assim para o elemento 1:

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \longrightarrow \{u_1^e\} = [L_1]\{u^g\} \tag{2.25}$$

Para o elemento 2:

$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \longrightarrow \{u_2^e\} = [L_2]\{u^g\} \tag{2.26}$$

Dessa maneira, utilizando as matrizes de transformações lineares, pode-se escrever as matrizes de massa e rigidez e o vetor de força no sistema global, conforme as Eqs. (2.27).

$$\begin{cases} [M^g]_{(nxn)} = [L_1]^T [M^{(e)}][L_1] + [L_2]^T [M^{(e)}][L_2] \\ [K^g]_{(nxn)} = [L_1]^T [K^{(e)}][L_1] + [L_2]^T [K^{(e)}][L_2] \\ \{F^g\}_{(n,1)} = [L_1]^T \{F^{(e)}\} + [L_2]^T \{F^{(e)}\} \end{cases} \tag{2.27}$$

Onde *n* é o número de graus de liberdade total do sistema, nesse caso seis graus de liberdade. A generalização para *n* graus de liberdade, pode ser feita utilizando *m* matrizes de transformação lineares, sendo *m* o número total de elementos.
A Eq. (2.24) é reescrita como:

$$[M^g]\{\ddot{u}^g(t)\} + [D^g]\{\dot{u}^g(t)\} + [K^g]\{u^g(t)\} = F^g \tag{2.28}$$

Sendo $[M^g]$, $[D^g]$, $[K^g]$ as matrizes globais de massa, amortecimento e rigidez respectivamente. $\{F^g\}$ é o vetor global de força, e $\{u^g(t)\}$, $\{\dot{u}^g(t)\}$, $\{\ddot{u}^g(t)\}$ são os vetores globais de deslocamento, velocidade e aceleração respectivamente.

2.2 Modelagem de uma Placa do Tipo Reissner-Mindlin

Analiticamente, os modelos matemáticos de placas são expressos por equações diferenciais que fornecem a solução em qualquer ponto do domínio. Porém, em muitos casos, como a

solução analítica não é conhecida, recorre-se aos modelos discretos, obtidos a partir de uma aproximação numérica, como o MEF.

As principais teorias sobre placa, a teoria de Kirchhoff, e Reissner-Mindlin.

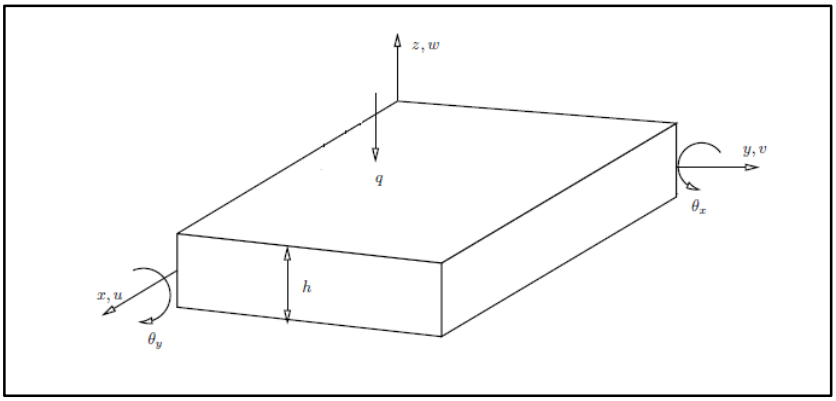
Por volta de 1950, Kirchhoff estabeleceu as hipóteses fundamentais da teoria de placa, a partir da energia potencial dos componentes de curvatura e torção, obtendo uma equação diferencial de quarta ordem, no qual a rigidez à flexão foi definida em termos do módulo de Young e do coeficiente de Poisson, desprezando o efeito da deformação por cisalhamento, assumindo que retas normais ao plano médio da placa permanecem normais após a deformação (FARIA, 2006; BARKANOV, 2001; OÑATE, 1995).

Outra teoria muito utilizada é de Reissner (1944) no qual sua teoria para placas, foi formulada considerando uma distribuição de tensões internas e o efeito da deformação por cisalhamento, resultando em um sistema de equações diferenciais. Enquanto a equação diferencial desenvolvida por Kirchhoff era de quarta ordem, a equação diferencial encontrada por Reissner era de sexta ordem.

Mindlin (1951) formulou um modelo próximo daquele apresentado por Reissner. Sua teoria tem como base as equações de equação do equilíbrio da teoria da elasticidade tridimensional para um corpo em movimento, considerando o efeito da inércia rotatória e da vibração devido ao cisalhamento. Obteve-se as tensões, assumindo constante as distorções que ocorrem na espessura. A equação da placa de Mindlin, assim como a de Reissner, também era de sexta ordem.

A seguir são apresentados os graus de liberdade para uma placa de Kirchhoff e Reissner-Mindlin.

Figura 2. 5:Deslocamentos e rotações pra uma placa de Kirchhoff e Reissner-Mindlin



Fonte: Adaptado (Ferreira, 2007)

A teoria de Kirchhoff apresenta as seguintes hipóteses:

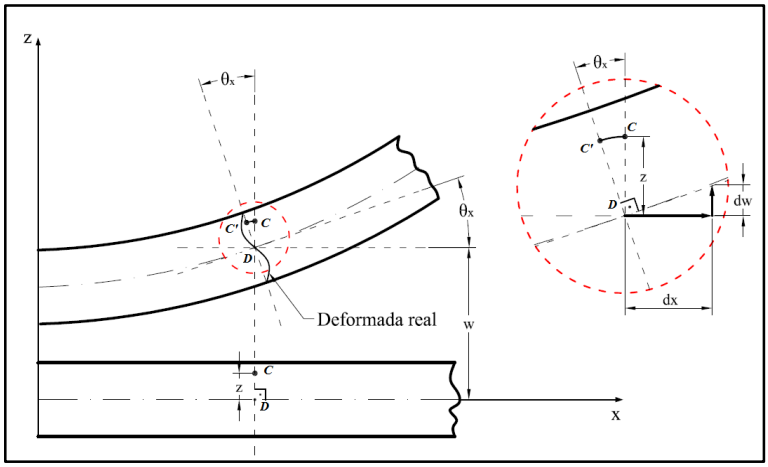
1) Os deslocamentos horizontais são considerados nulos, pois os pontos contidos no plano médio somente possuem deslocamento transversal;
2) Todos os pontos contidos em uma reta normal ao plano médio têm o mesmo deslocamento vertical;
3) A tensão normal na direção z (σ_z) é desprezível;
4) Retas normais ao plano médio da placa indeformada permanecem retas normais ao plano médio após a deformação da placa.

Para a teoria de Reissner-Mindlin, consideradas as três primeiras hipóteses da teoria de Kirchhoff, sendo a quarta dada por:

4) As retas normais ao plano médio da placa indeformada permanecem retas, mas não necessariamente normais ao plano médio da placa indeformada.

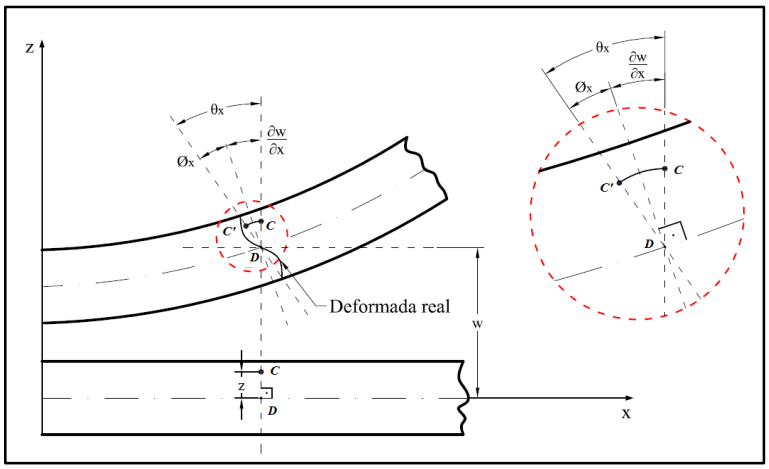
As Figs. 2.6 e 2.7, apresentam o deslocamento do ponto *C* para o ponto *C'*

Figura 2. 6: Teoria de Kirchhoff



Fonte: Adaptado Saliba (2007)

Figura 2. 7: Teoria de Reissner-Mindlin



Fonte: Adaptado Saliba (2007)

As Figs. 2.6 e 2.7 representam o deslocamento do ponto C, nas duas teorias. Conforme apresentado na Fig. 2.6 na teoria de Kirchhoff, o ponto C, que está a uma distância z do plano médio no estado indeformado e permanece a essa mesma distância z após a deformação da placa.

Sendo assim, as rotações θ_x e θ_y são calculadas de acordo com a quarta hipótese de Kirchhoff (Eq. 2.29) e de Reissneir-Mindlin (Eq. 2.30):

$$\begin{cases} \theta_x = \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \theta_y = \dfrac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \tag{2.29}$$

$$\begin{cases} \theta_x = \dfrac{\partial w}{\partial x} + \phi_x \\ \theta_y = \dfrac{\partial w}{\partial y} + \phi_y \end{cases} \tag{2.30}$$

Para Soriano (2003), a hipótese 4 da teoria de Reissner-Mindlin permite uma maior flexibilidade, se mostrando superior a teoria de Kirchhoff, por melhor se aproximar do modelo tridimensional.

A teoria de Reissner-Mindlin surge a partir da necessidade de que algumas placas podem não ser consideradas finas, dessa maneira, a consideração dos efeitos das tensões de corte

transverso são altamente relevantes, desse modo, as hipóteses de Kirchhoff consideradas válidas para as placas finas deixam de ser admissíveis.

2.1.1 Modelagem via Métodos dos Elementos Finitos

De acordo com Saliba et al. (2011), as rotações em torno do eixo *x* e do eixo *y* são independentes do deslocamento *w*.

As relações de deformação e deslocamento são escritas de acordo com a Eq. (2.31): (ZIENKIEWICZ, 2005; SORIANO, 2003; SANCHES, 1998; OÑATE, 1995):

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_x = -z\dfrac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \varepsilon_y = -z\dfrac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \varepsilon_z = 0 \\ \gamma_{xy} = -z\left(\dfrac{\partial \theta_y}{\partial x} + \dfrac{\partial \theta_x}{\partial y}\right) \\ \gamma_{xz} = -\theta_x + \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = -\theta_y + \dfrac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \tag{2.31}$$

Escrevendo as Eqs. (2.31) em termo do vetor de deformação por flexão (Eq. (2.32)) e do vetor de deformações por cisalhamento transversal (Eq. 2.33) tem-se:

$$\varepsilon_f = \begin{cases} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{cases} \tag{2.32}$$

$$\varepsilon_c = \begin{cases} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{cases} \tag{2.33}$$

As relações de tensão e deformação são apresentadas nas Eqs. (2.32) e (2.33), considerando $\sigma_z \cong 0$. Na Eq. (2.34) é apresentado o vetor de tensões por flexão, e na Eq. (2.35) é apresentado o vetor devido à tensão de cisalhamento.

$$\sigma_f = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = D_f \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2.34}$$

$$\sigma_c = \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = D_c \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \tag{2.35}$$

A energia de deformação é dada por:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \sigma_f^T \varepsilon_f \, dV + \frac{\alpha}{2}\int_V \sigma_c^T \varepsilon_c \, dV \tag{2.36}$$

Na Eq. (2.36), α é o coeficiente de correção. Este coeficiente é utilizado no cálculo dos esforços transversais como um fator de correção dos módulos de elasticidade transversal, a fim de aproximar o trabalho de deformação entre as soluções aproximadas pela teoria de Reissner-Mindlin e pela solução exata da teoria da Elasticidade. Usualmente esse valor é considerado igual a 5/6 (BATHE et al 1985).

O campo de deslocamento é dado pela Eq. (2.37):

$$\begin{cases} u = z\theta_x \\ v = z\theta_y \\ w = w_0 \end{cases} \tag{2.37}$$

Sendo θ_x e θ_y as rotações do plano médio em torno dos eixos *x* e *y* respectivamente.

Levando em conta as relações construtivas, em que:

$$\sigma_f = D_f \sigma_f \tag{2.38}$$

$$\sigma_c = D_c \sigma_c \tag{2.39}$$

Sendo D_f a matriz construtiva de flexão, e D_c a matriz construtiva referente ao cisalhamento, dadas por:

$$D_f = \frac{E}{\left(1-\nu^2\right)}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{2.40}$$

$$D_c = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \tag{2.41}$$

onde $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ é o módulo referente ao cisalhamento, E é o modulo de Young e ν é o coeficiente de Poisson.

Dessa forma, a Eq. (2.36) é reescrita como:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon_f^T D_f \varepsilon_f \, dV + \frac{\alpha}{2}\int_V \varepsilon_c^T D_c \varepsilon_c \, dV \tag{2.42}$$

Tendo em vista que cada variável é interpolada independentemente, tem-se que:

$$w = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta) w_i \tag{2.43}$$

$$\theta_x = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta) \theta_{xi} \tag{2.44}$$

$$\theta_y = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta) \theta_{yi} \tag{2.45}$$

No qual:

$$[N_i(\xi,\eta)] = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix}^T \tag{2.46}$$

Onde:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \\ \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \end{bmatrix} \tag{2.47}$$

Onde $N_i(\xi,\eta)$ são as funções de forma do elemento bidimensional com 4 nós.

Os graus de liberdade são definidos de acordo com a Eq. (2.48):

$$d^e = [w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad w_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad w_3 \quad \theta_{x3} \quad \theta_{y3} \quad w_4 \quad \theta_{x4} \quad \theta_{y4}]^T \tag{2.48}$$

As deformações são obtidas pelas equações abaixo:

$$\varepsilon_f = zB_f d^e \tag{2.49}$$

$$\varepsilon_c = B_c d^e \tag{2.50}$$

Onde as matrizes B_f e B_c são definidas por:

$$B_f = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{2.51}$$

$$B_c = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & N_1 & 0 & \dots & \frac{\partial N_4}{\partial x} & N_4 & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & N_1 & \dots & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & N_4 \end{bmatrix} \tag{2.52}$$

Sendo B_f a matriz constitutiva generalizada de flexão e B_c a matriz constitutiva generalizada de cisalhamento

Dessa maneira, a energia de deformação apresentada na Eq. (2.42) pode ser reescrita como:

$$U = \frac{1}{2} d^T \int_{\Omega^e} \int_z B_f^T D_f B_f \, dz d\Omega^e d + \frac{\alpha}{2} d^T \int_{\Omega^e} \int_z B_c^T D_c B_c \, dz d\Omega^e d \tag{2.53}$$

Ou conforme a Eq. (2.54).

$$[K^e] = \frac{h^3}{12} \int_{\Omega^e} B_f^T D_f B_f \, d\Omega^e + \alpha h \int_{\Omega^e} B_c^T D_c B_c \, d\Omega^e \tag{2.54}$$

A matriz elementar de massa é dada por:

$$[M^e] = \int_{\Omega^e} \sigma [N_i(\xi, \eta)]^T \begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^3}{12} \end{bmatrix} d\Omega^e \tag{2.55}$$

O Sistema de equações do movimento na forma matricial é dada por:

$$[M^{grm}] \{\ddot{u}^{grm}(t)\} + [D^{grm}] \{\dot{u}^{grm}(t)\} + [K^{grm}] \{u^{gmr}(t)\} = F^{grm} \tag{2.56}$$

Sendo $[M^{grm}]$, $[D^{grm}]$, $[K^{grm}]$ as matrizes globais de massa, amortecimento e rigidez respectivamente. $\{F^{grm}\}$ é o vetor global de força, e $\{u^{grm}(t)\}$, $\{\dot{u}^{grm}(t)\}$, $\{\ddot{u}^{grm}(t)\}$ são os vetores globais de deslocamento, velocidade e aceleração respectivamente.

A matriz de amortecimento considerada, refere-se ao amortecimento de Rayleigh, ou seja, uma combinação linear entre a matriz de massa e a matriz de rigidez do elemento de placa.
O sobrescrito ^{grm} indica a matriz global para a placa de Reissner-Mindlin. Sendo que:

$$\begin{cases} \left[K^{grm}\right] = \sum_{i=1}^{n} \left[[K]^{e}\right]_{i} \\ \left[M^{grm}\right] = \sum_{i=1}^{n} \left[[K]^{e}\right]_{i} \\ \left[D^{grm}\right] = \alpha\left[M^{grm}\right] + \beta\left[K^{grm}\right] \\ \{F^{grm}\} = \sum_{i=1}^{n} \{F^{e}\}_{i} \\ \{F^{e}\} = \{F_1, F_2, ..., F_n\}^{T} \end{cases} \tag{2.57}$$

2.3. Introdução aos Métodos de Redução de Modelos

Com o avanço tecnológico, as estruturas são cada vez mais complexas, exigindo um esforço computacional cada vez maior. Apesar dos avanços computacionais, o custo de execução de uma simulação numérica ainda é muito alto, pois para descrever com precisão a estrutura modelada requer-se um grande número de graus de liberdade (gdl). Em grande parte dos problemas, é necessário diminuir o número de gdl, para que as simulações ocorram de forma mais rápida. Essa diminuição pode provocar erros de aproximações e o sistema modelado pode distanciar-se do sistema original (SINDLER E SULITKAYU, 2013; QU, 2004).

Os Métodos de Redução de Modelos (MRMs) são utilizados como uma das possíveis formas de acelerar o processo de obtenção da solução e torná-la confiável na prática. A ideia principal dos MRMs é desenvolver métodos que possam reduzir significativamente a dimensão do problema e, consequentemente, o custo computacional, mas mantendo a precisão da solução do sistema.

Em mecânica estrutural, os MRMs são aplicados para reduzir a dimensão das matrizes da equação do movimento, desprezando certos gdl com menor importância da estrutura

mecânica. A qualidade da resposta obtida pelo MRM, depende de quão bem ele captura a dinâmica do modelo original (KOUTSOVASILIS et al.,2008).

Os modelos reduzidos ganharam uma atenção considerável por permitirem atender a dois desafios, que são o de se obter resultados satisfatórios e diminuir o custo computacional (LULF, 2013). De acordo com Qu (2004), técnicas de redução de modelos têm sido amplamente utilizadas na análise, reanálise, otimização dinâmica estrutural, problema de autovalor, vibração estrutural e flambagem, estudos de sensibilidade e parâmetros de projeto de controle, atualização de modelo e detecção de danos. Além disso, diferentes problemas relacionados à transferência de calor, interação fluido-estrutura, entre outros, também são objetos de redução de modelos.

Muitos métodos de redução adotam a estratégia de reduzir o modelo a partir da remoção de alguns gdls considerados secundários (ou escravos) do modelo original, retendo um conjunto menor de gdls primários (ou mestres) (KOUTSOVASILIS et al.,2008; QU, 2004).

Cada método de redução em particular utiliza uma matriz de transformação para diminuir o tamanho das matrizes modeladas através do método dos elementos finitos.

O primeiro método de redução conhecido na literatura, foi proposto por Guyan (1965) e Irons (1965), conhecido como Condensação Estática, onde a matriz de transformação despreza os gdls ligados à inércia do problema.

Bushard (1981) questiona a qualidade das aproximações utilizando esse método de redução, principalmente quando utilizadas em análises dinâmicas.

Para suprir as deficiências encontradas no método da Condensação Estática, Bampton e Craig (1968), propuseram o método *Componet Mode Synthesis* (CMS). O CMS além de utilizar a matriz de transformação do método da Condensação Estática, também utiliza uma matriz de autovalores do sistema, melhorando a eficiência da aproximação do método. Ele tornou-se muito utilizado para simplificar problemas de engenharia, destacando-se os trabalhos de Aoyama e Yagawa (2001), em que o CMS foi utilizado em autoanálise estrutural; Botto et al. (2007) utilizaram o CMS para análises transientes de modelos de elementos finitos de calor por condução/ convecção e Nachtergaele et al. (2010), no qual o CMS foi utilizado para modelos termomecânicos fracamente acoplados.

Proposto por O'Callahan (1989), o método *Improved Reduced System* (IRS), utiliza a matriz de transformação do método da Condensação Estática combinada com a matriz de inércia para determinar uma matriz de transformação mais eficiente da que foi proposta por Guyan e Irons (1965). Vale ressaltar os trabalhos de Gordis (1992), Law et al. (2004), Barbieri et al (2004), Friswell et al (1996).

Friswell et al (1995, 1998), apresenta a forma iterativa para o método IRS, denominado de *Iterative Improved Reduced System* (IIRS), bem como a sua convergência. Podem ser encontrados na literatura alguns trabalhos que utilizam o método IIRS, como Barbieri, et al. (2001), Barbieri et al. (2004), Xia e Lin (2004), Choi et al. (2007), Cho (2007).

Quando a matriz de transformação baseia-se somente na matriz dos autovalores e autovetores, pode-se destacar o método desenvolvido por Kammer (1987), denominado de *Modal Reduction*, e o *System Equivalent Reduction Expansion Process* (SEREP), desenvolvido por O'Callahan et al. (1989). Neste caso, ressalta-se os trabalhos de Papadopoulos e Garcia (1996), Cardona et al. (2006), Das e Dutt (2008, 2012), Aglietti et al. (2010), Aglietti et al. (2012).

Um modelo iterativo para o *SEREP* foi desenvolvido por Sastry et al. (2003).

De Lima et al. (2010,2015), apresentaram um método de redução baseado na utilização dos autovetores do sistema, enriquecendo a matriz de transformação com resíduos de forças, produzindo bons resultados em sistemas com material viscoelástico.

O método baseado no espaço de Krylov (método de Krylov) apresentou bons resultados para diferentes aplicações, como verificado Bai (2002), Antoulas (2005), Sindler e Sulitkayu (2013), Yu et al. (2013).

O método de *Krylov spanned Component Mode Synthesis* (KCMS) é uma modificação do método clássico do CMS, já que ambos utilizam o mesmo princípio da superposição para a separação dos graus de liberdade principais e secundários; porém, enquanto o método CMS utiliza os autovetores referentes aos graus de liberdade principais, o método KCMS baseia-se no Espaço de Krylov (KOUTOSOVALIS, 2008).

Outro importante método de redução, desenvolvido por Kirsch (1991) é o *Combined Approximations* (CA), utilizado problemas estáticos e dinâmicos, que podem ser encontrados em Kirsch et al. (1991, 2002, 2003, 2004, 2006), Chen et al. (2000), Rong et al. (2003), Gerges (2013).

2.3.1. Processo de Redução

A equações do movimento de um dado sistema é dado por:

$$[M]_n \ddot{x}(t) + [D]_n \dot{x}(t) + [K]_n x(t) = f_n(t) \tag{2.58}$$

Em que *n* é o número total de graus de liberdade, $[M]_n$, $[D]_n$, $[K]_n \in R^{nxn}$ são as respectivas matrizes de massa, amortecimento e rigidez do modelo, $x_n, \dot{x}_n, \ddot{x}_n \in R^{nxn}$ são os vetores de deslocamento, velocidade e aceleração, respectivamente, e $f_n \in R^{nx1}$ é o vetor de forças aplicadas na estrutura.

Com a aplicação do método de redução, a Eq. (2.58) é reescrita como:

$$[M]_R \ddot{x}_R(t) + [D]_R \dot{x}_R(t) + [K]_R x_R(t) = f_R(t) \tag{2.59}$$

Onde, $[M]_R = T^T[M]T$, $[D]_R = T^T[D]T$, $[K]_R = T^T[K]T$, são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez reduzida, $\ddot{x}, \dot{x}, x$ são os vetores reduzidos de aceleração, velocidade e deslocamento e $F_R = T^T f$ é o vetor de forças reduzidas, *T* é a matriz de transformação, que é gerada de acordo com cada método de redução.

Aqui, é estendido o estudo a dois métodos de redução, o IRS, usando a transformação de redução dinâmica ao invés da redução estática como a transformação de base; e o IIRS, o esquema iterativo proposto por Friswell como forma de melhorar a estimativa atual do modelo reduzido.

Em seguida, é apresentado um novo método, denominado de *Improved Reduced System Enriched* (IRSE), no qual o método IRS é enriquecido com a matriz de autovetores, a fim de melhorar a qualidade da resposta bem como a economia de tempo.

2.3.2. *Improved Reduced System* (IRS)

O método da Condensação Estática de Guyan, não apresenta frequentemente alta precisão nos resultados, proveniente principalmente da omissão dos graus de liberdade relacionados a inércia.

A fim de melhorar a precisão do método descrito por Guyan, O'Callahan et al. (1989) propôs um método modificado, chamado de "IRS" (*Improved Reduced System*). Nesse método, um termo extra é adicionado à transformação da Condensação Estática, incluindo então os graus de liberdade referentes à inércia.

Ignorando os termos referentes ao amortecimento e força, as matrizes de massa e rigidez, e os vetores de força, deslocamento e aceleração, são subdivididos em graus de liberdade principais (*p*) e secundários (*s*), conforme apresentado na Eq. (2.60).

$$\begin{bmatrix} M_{pp} & M_{ps} \\ M_{sp} & M_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_p \\ \ddot{x}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{pp} & K_{ps} \\ K_{sp} & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_p \\ x_s \end{Bmatrix} = 0 \tag{2.60}$$

A escolha entre graus de liberdade principais varia entre 40% à 60% da quantidade de graus de liberdade total do sistema. A matriz de transformação para o método IRS é dada por:

$$x = \begin{pmatrix} x_p \\ x_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ -K_{ss}^{-1}K_{sp} + K_{ss}^{-1}SM_R^{-1}K_R \end{pmatrix} x_p = T_{IRS}\, x_p \tag{2.61}$$

$$M_R = T_g'[M_n]T_g \tag{2.62}$$

$$K_R = T_g'[K_n]T_g \tag{2.63}$$

Em que:

$$S = M_{sp} - M_{ss}K_{ss}^{-1}K_{sp} \tag{2.64}$$

e T_g é a matriz de transformação do método da Condensação Estática de Guyan.

$$T_g = \begin{bmatrix} I \\ -K_{ss}^{-1}K_{sp} \end{bmatrix} \tag{2.65}$$

2.3.3 *Iterative Improved Reduced System* (IIRS)

Para Friswell et al. (1995) estas estimativas da matriz de transformação pelo método IRS, podem ser melhoradas a fim de se obter uma matriz de transformação mais precisa.

Dessa maneira, uma matriz de transformação iterativa é apresentada, conforme descrita pela Eq. (2.66):

$$T_{IIRS,i+1} = \begin{pmatrix} \mathrm{I} \\ t_{IIRS,i} \end{pmatrix} \tag{2.66}$$

No qual:

$$t_{IIRS,i+1} = -K_{ss}^{-1}K_{sp} + K_{ss}^{-1}\left(M_{sp} + M_{ss}t_{IIRS,i}\right)M_{IRS,i}^{-1}K_{IIRS,i} \tag{2.67}$$

$$M_{IIRS,i} = T_{IIRS,i}'[M_n]T_{IIRS,i} \tag{2.68}$$

$$K_{IIRS,i} = T_{IRS,i}'[K_n]T_{IIRS,i} \tag{2.69}$$

Sendo que, para a primeira iteração, a matriz $T_{IIRS,1}$ é dada pela matriz de transformação do método IRS, T_{IRS} . A matriz de transformação iterativa é atualizada *n* vezes até atingir a precisão desejada, podendo em alguns casos apresentar um tempo computacional mais elevado.

2.3.4 *Improved Reduced System Enriched* (IRSE)

A eficácia dos métodos IRS e IIRS é baseada na quantidade de graus de liberdade principal selecionados. Embora os resultados apresentados pelo método iterativo IIRS sejam satisfatórios, em muitos casos, a precisão desse método pode afetar o desempenho do tempo computacional

A fim de obter uma matriz de transformação que equilibre a precisão com uma maior economia de tempo, é proposto neste trabalho o enriquecimento do método IRS, a partir da matriz dos autovetores, conforme discretizada abaixo:

$$T_{IRSE} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{I} \\ T_U \end{pmatrix} & [\Phi_m] \end{bmatrix} \tag{2.70}$$

Em que $[\Phi_m] = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \cdots & \Phi_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{n,1} & \cdots & \Phi_{n,m} \end{bmatrix}$ é a matriz dos autovalores truncadas por *m* colunas.

T_U é dado por:

$$T_U = -K_{ss}^{-1}K_{sp} + K_{ss}^{-1}\left(M_{sp} + M_{ss}t_{IRS}\right) \tag{2.71}$$

Onde t_{IRS} é a matriz de transformação do método IRS.

A matriz T_U é utilizada para minimizar os erros provenientes do método IRS, no qual se utiliza o método da Condensação Estática de Guyan. O valor *m*, referente ao truncamento da matriz de autovetores, de acordo com as simulações efetuadas, variou entre 10% à 15% do total de graus de liberdade do sistema, já o valor de *p* referente aos graus de liberdade principais variou entre 10% e 20% do número total de graus de liberdade. Dessa maneira, a matriz de transformação para o método IRSE possui dimensão menor que a matriz apresentada pelos métodos IRS e IIRS, melhorando a economia de tempo e devido ao enriquecimento utilizando a matriz de autovetores, a qualidade das respostas é preservada.

Capítulo 3

3. INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE SISTEMAS MECÂNICOS NÃO LINEARES

A crescente preocupação para aperfeiçoar a modelagem e a análise de estruturas, combinando com inovação em termos de peso, conforto, segurança, ruído e durabilidade além da necessidade de projetos com menor tempo de produção, maior tempo de vida útil e minimização de custos o uso de computadores se torna uma ferramenta indispensável. Assim os modelos estruturais são empregados para realizar previsões precisas e confiáveis sobre o comportamento do sistema ao longo de sua vida útil.

Alguns modelos reais que operam em determinadas bandas de frequências podem ser representados por modelos lineares para a previsão e controle de seu comportamento dinâmico. Além disso, os modelos lineares são matematicamente mais simples de se representar, pois essa teoria já se encontra consolidada na literatura. Contudo, vários tipos de estruturas mecânicas que, em muitos casos são não lineares, são simplificadas com a linearização dos parâmetros do modelo. Porém, essa linearização pode não representar fielmente o sistema, pois os elementos estruturais estão cada vez mais leves, mais flexíveis e, com isso, aparecem cada vez mais as características não lineares (BORGES, 2008).

Os sistemas não lineares são altamente diversificados exigindo, muitas vezes, metodologias diferentes das utilizadas para os sistemas lineares. Devido a isso, a modelagem analítica torna-se inviável para tratar tais tipos de problemas (THOMSEN 2003).

Ao se linearizar um problema que possui características não lineares, pode-se obter resultados que não condizem com a realidade, havendo ainda a possibilidade de se ter descontinuidades nas respostas, dentre outros efeitos não-triviais estabelecidos dentro da teoria não linear.

Os princípios básicos que se aplicam a um sistema linear, quase sempre não são válidos na presença de não-linearidade. Por exemplo, o princípio da superposição não e válido para

sistemas não lineares; além disso, os sistemas não lineares podem apresentar mais de uma posição de equilíbrio (BORGES, 2008).

Os sistemas que apresentem não linearidades, mesmo que fracas, podem apresentar fenômenos extremamente interessantes e complexos. Estes fenômenos incluem saltos, bifurcações, saturação, ressonâncias, ciclos limites, interações modais e até o surgimento de comportamento caótico (RAND, 2003; VERHULST, 1999; NAYFEH e MOOK 1979).

A possibilidade para a ampla aplicação da teoria do caos se dá pelo fato do comportamento caótico estar vinculado às não-linearidades existentes nos sistemas de interesse.

A não linearidade pode estar ligada a diversos fatores, dentre os quais destaca-se: a não linearidade devido à geometria que ocorre quando uma estrutura apresenta valores relativamente grandes para os deslocamentos, e a deflexão pode trazer como consequência o aparecimento de momentos fletores adicionais (denominadas de segunda ordem), em virtude da presença de um esforço normal (GERGES 2013; ZIENKIEWICZ, et al 2005; NAYFEH e PAI 2004; AMABILI e PAIDOUSSIS 2003; BATHE, et al 1975).

Também pode-se ter não linearidade referente a inércia, que tem relação com termos da velocidade e/ou aceleração e tem a sua origem na energia cinética do sistema (KERSCHEN et al 2005). A não linearidade física decorre do tipo de material que influencia diretamente na presença de não linearidade; neste caso, as leis construtivas relativas a tensão e a deformação são não lineares (não segue a lei de Hooke), isto é, o comportamento do material não é elástico e linear (RICHARDS e SINGH 2001; WHITE et al, 2000).

Deve-se ainda considerar os efeitos de fricção seca, onde os corpos estão em contato um com o outro e também o amortecimento histerético, que também são exemplos de não linearidades em sistemas (AL-BENDER et al. 2004; CAUGHEY e VIJAYARAGHAVAN 1970). Por último, pode-se citar também as não linearidade devido as condições de contorno, como folgas, superfícies rígidas em fluidos, forças externas não lineares, como a magneto-elástica, eletrodinâmicas e hidromecânicas (KERSCHEN et al 2005).

3.1 Modelagem de uma Estrutura com Não Linearidade Física Localizada

O estudo da flexão, flambagem e vibrações livres de vigas, placas planas e casca fina são de grande importância no que diz respeito à área de mecânica estrutural.

Problemas de fundação elástica, podem ser aproximados por elementos de viga, acopladas com molas, no qual a reação exercida pela mola sobre a estrutura pode não ser diretamente proporcional.

Aqui, molas lineares e molas não lineares são acopladas na estrutura do tipo viga de Euler-Bernoulli e do tipo placa de Reissner-Mindlin (modeladas no capítulo 2), como forma de representar não linearidades localizadas. Dessa maneira, é analisada a resposta transiente obtida sobre a ação desse tipo de não linearidade.

A equação do movimento de uma estrutura qualquer é dada por:

$$[M_E^g]\{\ddot{u}^g(t)\}+[D_E^g]\{\dot{u}^g(t)\}+[K_E^g]\{u^g(t)\}=F^g \tag{3.1}$$

onde o subscrito *E* representa as matrizes referentes à estrutura. Ao utilizar o acoplamento de molas lineares na estrutura, pode-se reescrever a Eq. (3.1) como:

$$[M_E^g]\{\ddot{u}^g(t)\}+[D_E^g]\{\dot{u}^g(t)\}+[K_{EM}^g]\{u^g(t)\}=F^g \tag{3.2}$$

Na qual:

$$[K_{EM}^g]=[K_E^g]+[K_M^g] \tag{3.3}$$

Sendo o subscrito *M* referente à matriz de rigidez do elemento de mola.

A inserção de molas não lineares, levam a Eq. (3.1) a ser reescrita da forma:

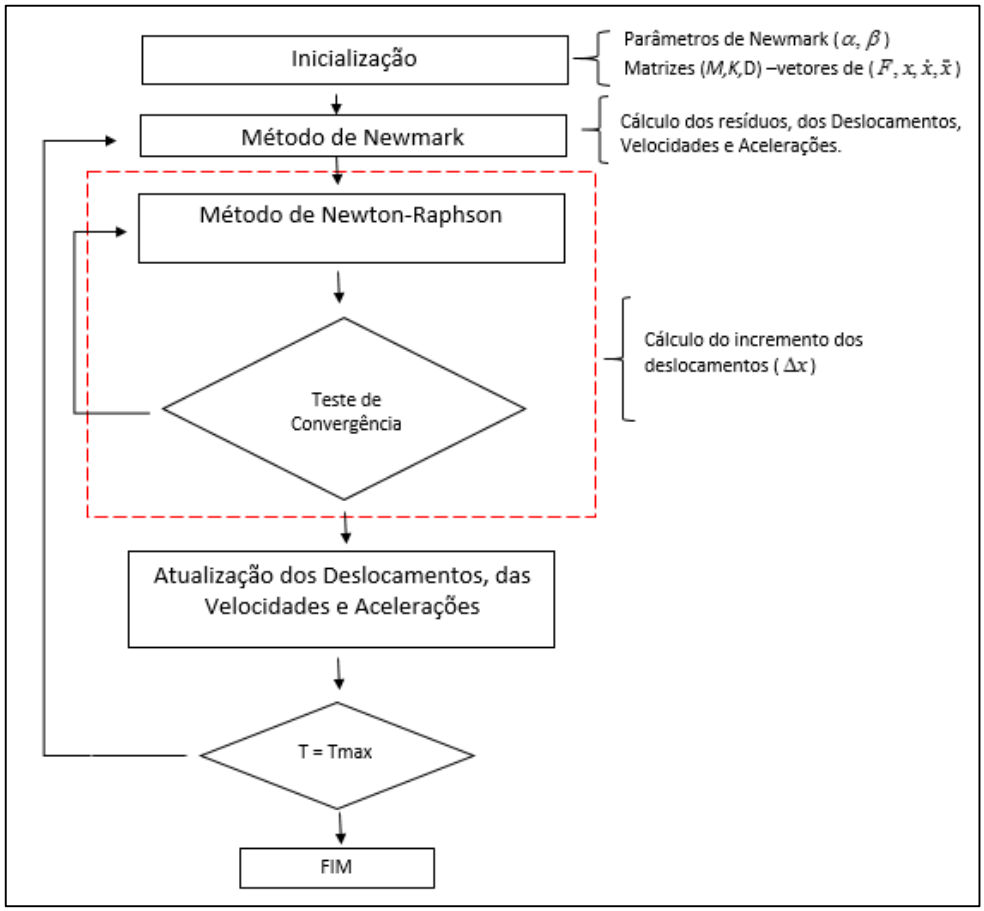
$$[M_E^g]\{\ddot{u}^g(t)\}+[D_E^g]\{\dot{u}^g(t)\}+[K_E^g]\{u^g(t)\}+[K_M^g]\{u^g(t)\}^3=F^g \tag{3.4}$$

Em que $[K_M^g]$ é a matriz de rigidez da mola não linear. O termo $\{u^g(t)\}^3$ indica que o tipo de não linearidade empregada no sistema é física (não linearidade cúbica), não obedecendo as lei de Hooke, como é o caso do acoplamento com molas lineares.

De Lima et al (2015); Qu (2004) e Friswell et al (1996), também acoplaram molas com não linearidade cúbica em estruturas do tipo viga e placa.

As simulações apresentadas a seguir, foram executas em ambiente Matlab®, utilizando o método de Newmark combinado com Newton Raphson (GAVIN, 2014; RAO, 2008; CHOPRA, 1995), conforme o Algoritmo de Newmark apresentado abaixo, com passo de tempo $\Delta t = 0.0001$, os parâmetros α e β de Newmark com valores de 0.5 e 0.25 respectivamente. As configuração da máquina utilizada para a execução das simulações foram: Notebook Dell com processador Intel Core i7, HD de 1 Tera e memória Ram de 8Gb, com placa de vídeo dedicada AMD Radeon R7 M265 de 2GB.

Algoritmo 3. 1: Newmark com Newton Raphson



Fonte: O autor

3.1.1 Simulações Numéricas Envolvendo uma Viga de Euler-Bernoulli com Não Linearidade Localizada

A seguir são apresentadas as simulações do acoplamento da mola linear e da mola não linear nos sistemas em questão. A Tabela 3.1, apresenta as propriedades físicas e geométricas para a viga e para as molas, bem como, os tipos de forças que estão sendo aplicadas na estrutura.

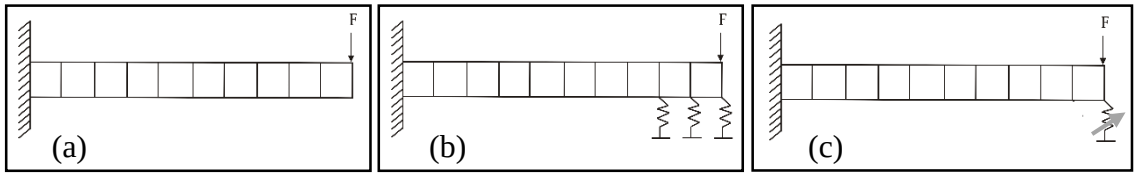
Tabela 3. 1: Forças, propriedades físicas e geométricas da viga

Propriedades	Geometria	Comprimento (m)	2.5
		Largura (m)	0.1
		Espessura (m)	0.04
		Rigidez da mola linear	800 N/m
		Rigidez da mola não linear	10^9 N/m^3
	Físicas	Densidade (Kg/m^3)	2700
		Modulo de Elasticidade (GPa)	69
Forças		Força Linear	Força Não Linear
		$f_{1H}(t) = 50\sin(\pi\omega t)$	$f_{2H}(t) = 160t\sin(60\pi t^2)$

Fonte: O Autor

Considera-se que a viga está engastada em uma extremidade ($x=0$) e livre na outra extremidade ($x=L$). As disposições das molas seguem conforme as configurações abaixo.

Figura 3. 1: Viga de Euler Bernoulli - (a) Conf.Inicial - (b) Conf.Linear - (c) Conf.Não Linear

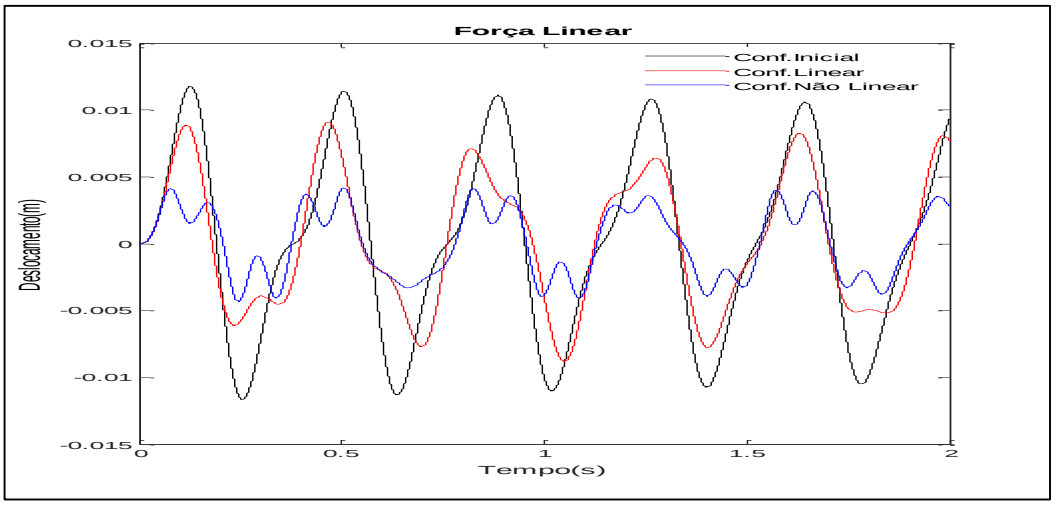


Fonte: O Autor

De acordo com a Fig. 3.1 (a) a configuração inicial da viga está sujeita somente a ação da força; já na Fig. 3.1 (b) são acopladas três molas lineares à viga e, na Fig. 3.1 (c), é acoplada uma mola com característica não linear à estrutura em questão.

Abaixo, na Fig. 3.2, são apresentadas a respostas transientes sujeitas a ação de uma força harmônica linear, conforme descrito na Tabela 3.1.

Figura 3. 2: Resposta transiente da Viga de Euler-Bernoulli com não linearidade localizada

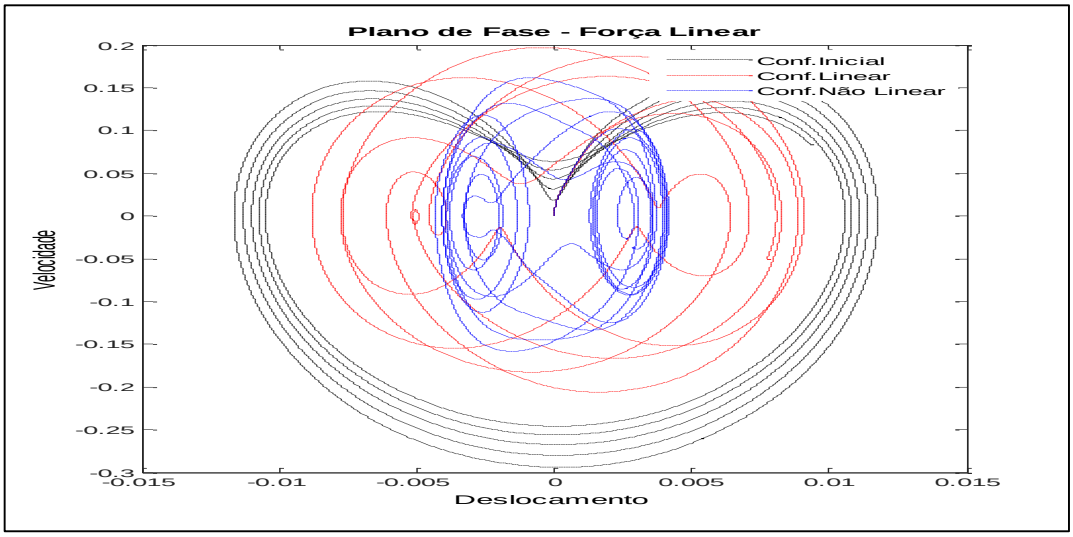


Fonte: O Autor

Na Fig. 3.2, primeiramente a viga foi acoplada com três molas lineares (cor vermelha), sendo que, neste caso, verificou-se uma pequena atenuação da vibração do sistema quando comparado ao sistema inicial (cor preta). No caso em que se inseriu uma mola com característica não linear na extremidade da viga (cor azul), obteve-se uma melhor redução da amplitude do deslocamento em comparação com a inserção das três molas lineares.

Apesar da análise de estabilidade não ser o objetivo do presente trabalho, apresenta-se na Fig. 3.3, o plano de fase para o caso em questão:

Figura 3. 3: Plano de Fase da viga de Euler-Bernoulli com não linearidade localizada

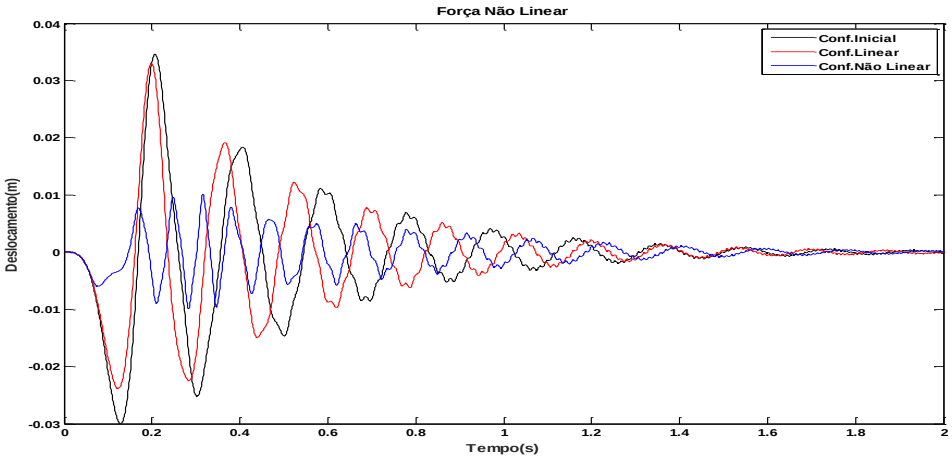


Fonte: O Autor

Observando o plano de fase, dado na Fig. 3.3, pode-se perceber que a curva referente ao sistema com a mola não linear possui trajetórias que não se fecham, fazendo com que se tenha um emaranhado de curvas se sobrepondo e, com isso, sugerindo um comportamento que com a existência de instabilidades e caos porém para afirmar que tal comportamento é realmente caótico, necessita-se de mais verificações matemáticas como, por exemplo, o cálculo dos expoentes de Lyapunov.

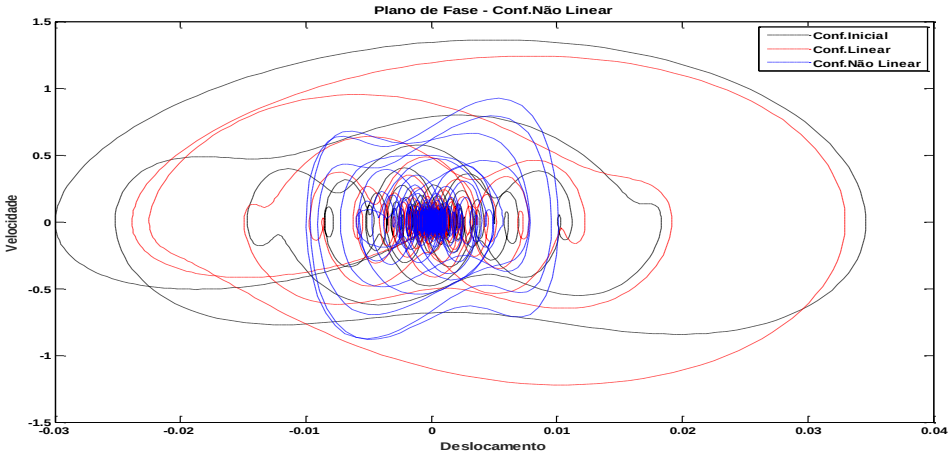
Já nas Figs. 3.4 e 3.5 o sistema está sujeito a ação de uma força harmônica não linear, conforme apresentado na Tabela 3.1.

Figura 3. 4: Resposta transiente da viga de Euler-Bernoulli com não linearidade localizada



Fonte: O Autor

Figura 3. 5: Plano de Fase da viga de Euler-Bernoulli com não linearidade localizada



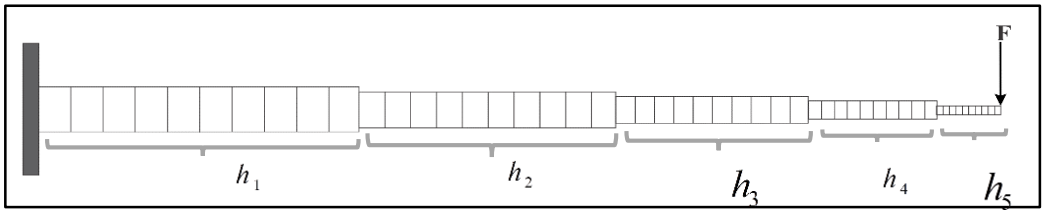
Fonte: O Autor

Na Fig.3.4 com a aplicação da força não linear, observou-se que com a aplicação das molas lineares (curva em vermelho), não se obteve bons resultados para atenuar a vibração do sistema na configuração inicial (curva em preto). Com a aplicação da mola não linear (curva em azul), pode-se perceber que o sistema apresentou uma melhor redução na amplitude do deslocamento. Como no caso mencionado anteriormente, na Fig. 3.5, percebe-se que o comportamento da curva representativa do sistema não linear possui um comportamento que sugere ser uma resposta caótica.

3.1.2 Simulações Numéricas de uma Viga Escalonada e não Linearidades Localizadas

Nesta seção, será utilizada uma viga de Euler-Bernoulli escalonada, conforme a Fig. 3.6:

Figura 3 6: Viga de Euler-Bernoulli Escalonada



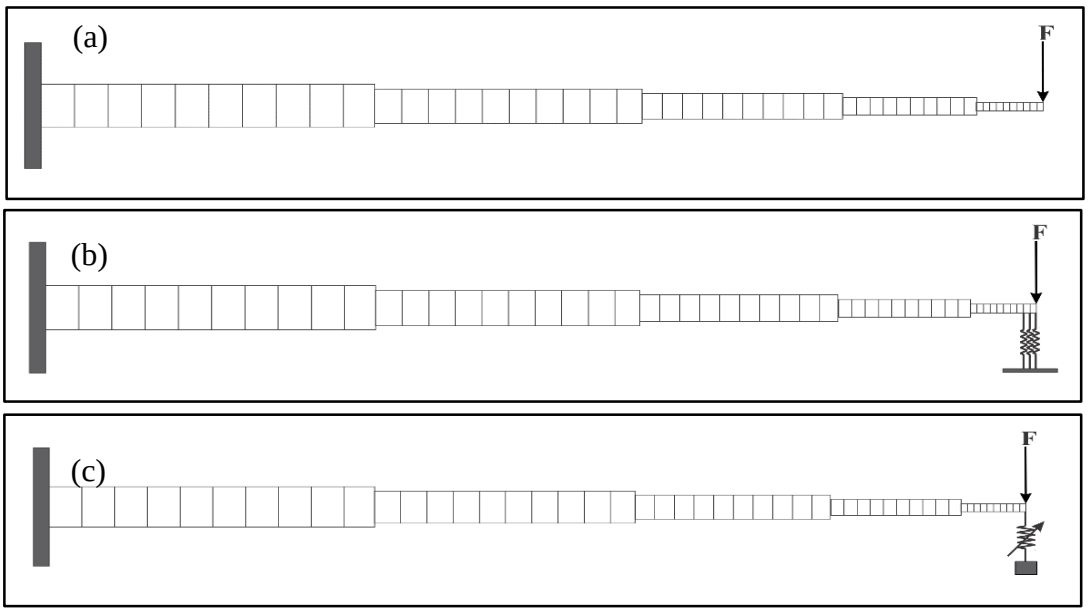
Fonte: O Autor

No qual h_i representa a espessura de cada parte da viga, conforme apresentado na Eq. (3.5):

$$\begin{cases} h_1 = 0.06 \\ h_2 = 0.05 \\ h_3 = 0.04 \\ h_4 = 0.03 \\ h_5 = 0.02 \end{cases} \tag{3.5}$$

A viga apresentada na Fig. 3.6, é analisada conforme as três configurações apresentadas na Fig. 3.7.

Figura 3. 7: Viga Escalonada: (a) Configuração Inicial – (b) Configuração Linear – (c) Configuração Não Linear

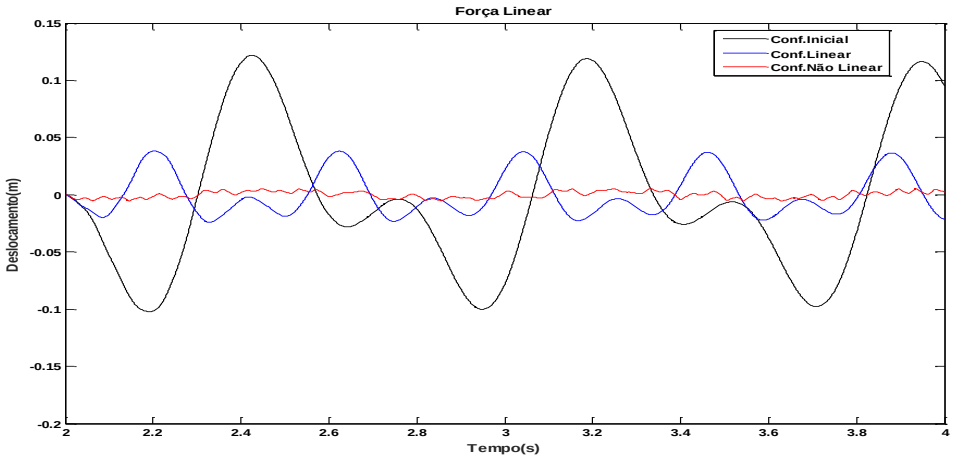


Fonte: O autor

As propriedades físicas e geométricas da viga são apresentadas na Tabela 3.1, sendo o comprimento da mesma, dividido em cinco partes iguais, referentes a cada variação da espessura h_i . Cada parte foi dividida em 10 elementos finitos, totalizando 50 elementos finitos.

A Fig. 3.8 apresenta a análise transiente, considerando a viga descrita na Fig. 3.7, com a aplicação da força linear descrita na Tabela 3.1.

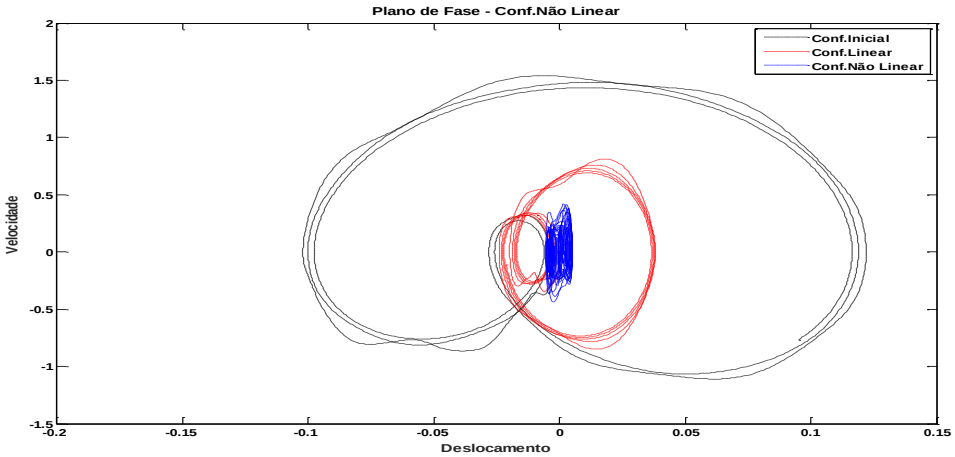
Figura 3. 8: Análise transiente da viga de Euler-Bernoulli escalonada



Fonte: O autor

O plano de fase apresentado na Fig. 3.9 demostra os ciclos de respostas obtidas na Fig. 3.8.

Figura 3. 9: Plano de fase – Viga de Euler-Bernoulli escalonada



Fonte: O autor

Conforme o plano de fase apresentado na Fig. 3.9, o acoplamento da mola não linear apresentou ciclos de respostas em uma faixa muito menor do que a apresentada pelo sistema na configuração inicial ou na presença de molas lineares.

Com a variação da espessura da viga e o acoplamento das molas lineares (cor vermelha), a amplitude de vibração do sistema apresentou uma redução significativa, como verificado nas Figs. 3.8 e 3.9. Assim como aconteceu para a viga de Euler-Bernoulli com espessura constante (seção 3.1.1), o acoplamento da mola com característica não linear apresentou resultados mais

eficientes do que os com a inserção de molas lineares, sendo que a amplitude do deslocamento foi rapidamente reduzida.

3.1.3 Simulações Numéricas Envolvendo uma Placa de Reissner-Mindlin com Não Linearidade Localizada

As simulações apresentadas abaixo, referem-se a placa de Reissner-Mindlin modelada na seção 2.2 do capítulo 2, sendo que molas lineares e molas com características não lineares são acopladas a estrutura da placa, conforme cada configuração apresentada na Fig. 3.10.

Com a inserção das molas, as equações do movimento do novo sistema são descritos no capítulo 3, seção 3.1.

As propriedades físicas e geométricas da placa estão dispostas na Tabela 3.2.

Tabela 3. 2: Forças, propriedades físicas e geométricas da placa

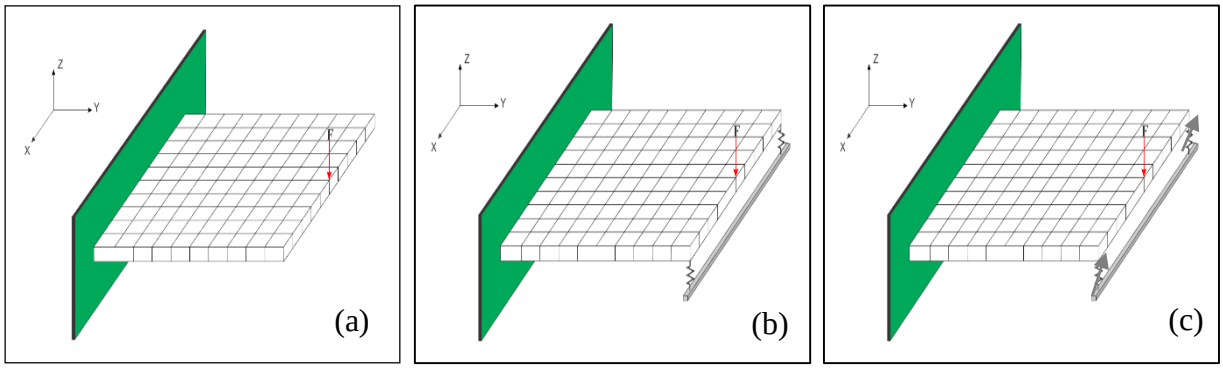
Geométricas	Comprimento (m)	0.5	
	Largura (m)	0.5	
	Espessura (m)	0.005	
	Coeficiente de Correção	5/6	
	Rigidez da Mola Linear	800 N/m	
	Rigidez da Mola Não Linear	10^9 N/m^3	
Físicas	Densidade (Kg/m^3)	2700	
	Modulo de Elasticidade (GPa)	69	
	Coeficiente de Poisson	0.33	
Força	Força Linear	Força Não Linear	Impulso
	$f_{1H}(t) = 20\sin(2\pi\omega t)$	$f_{2H}(t) = 20t\sin(160\pi t^2)$	$f_I(t) = 50$

Fonte: O Autor

Conforme a Fig. 3.10, é apresentada a configuração do sistema para três casos; em seguida, é apresentada a análise transiente pelo método de Newmark combinado com Newton Raphson.

Primeiramente, a Fig 3.10 apresenta a placa de Reissner Mindlin sem a presença de molas (a), em seguida tem-se a mesma placa, porém com o acoplamento de duas molas lineares (b) e em (c), tem-se o acoplamento de duas molas com característica não lineares.

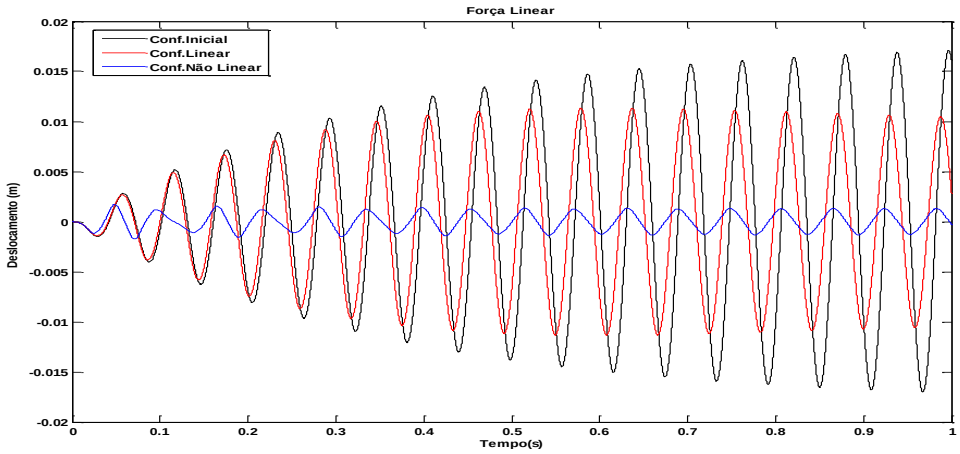
Figura 3. 10: Placa sujeita a ação de uma força harmônica linear: (a) Configuração Inicial – (b) Configuração Linear – (c) Configuração Não Linear



Fonte: O Autor

Na Fig. 3.1 são apresentadas as respostas transientes para cada configuração, considerando a aplicação da força linear descrita na Tabela 3.2.

Figura 3. 11: Análise transiente referente as configurações da Fig. 3.10.

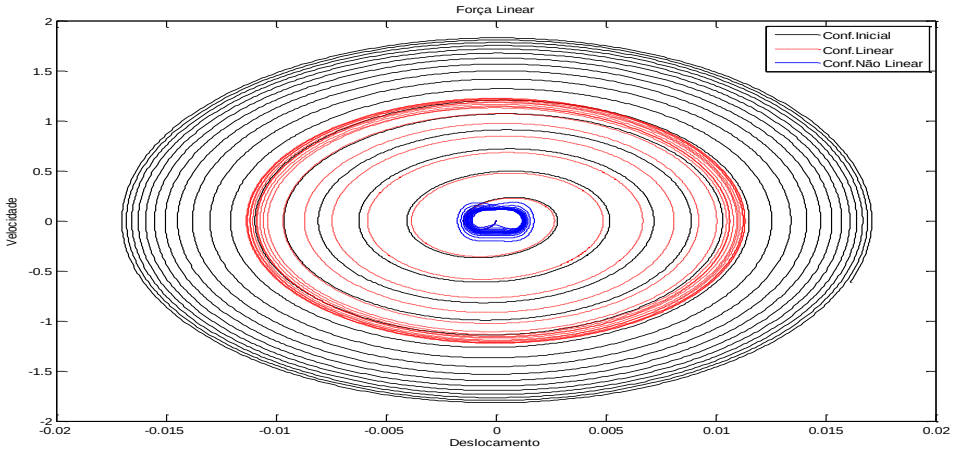


Fonte: O Autor

Na Fig 3.12, o plano de fase referente a Fig. 3.11, apresenta os ciclos de resposta para cada configuração, onde se confirma que as amplitudes estão de acordo com o apresentado na

Fig. 3.11, percebendo ainda uma resposta menos comportada que a apresentada nos casos lineares.

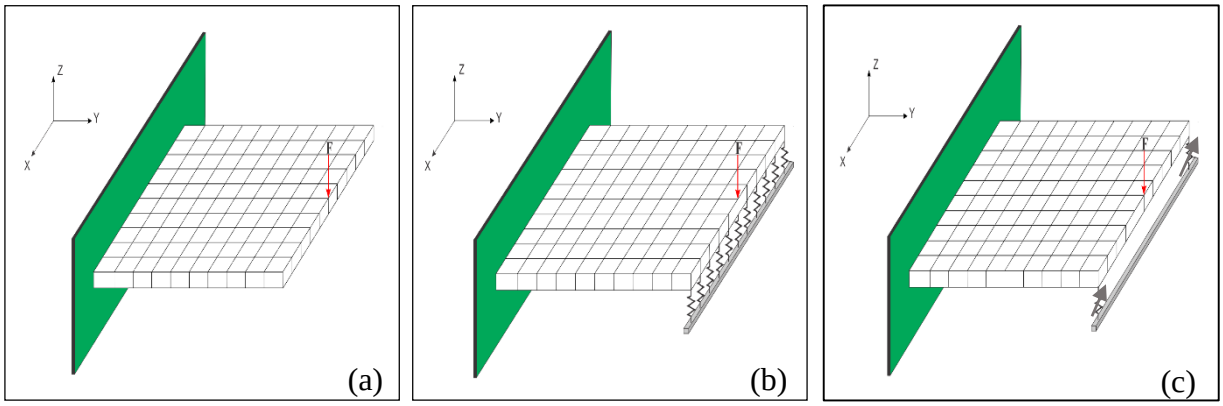
Figura 3. 12: Plano de Fase referente a resposta obtida na Fig. 3.11.



Fonte: O Autor

Agora na Fig. 3.13 ao invés de acoplar duas molas lineares na extremidade da placa, são acopladas onze molas lineares por toda a extremidade da placa, a fim de obter uma melhor redução da vibração do sistema.

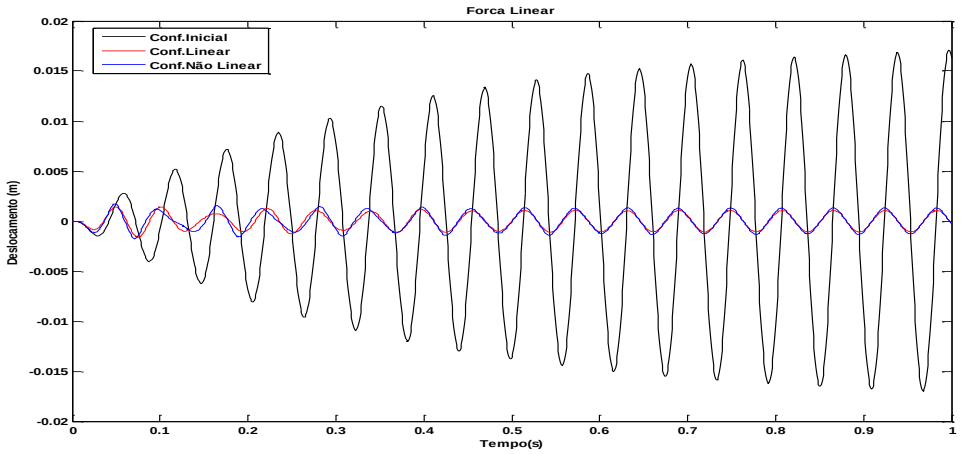
Figura 3. 13: Placa sujeita a ação de força linear: (a) Configuração Inicial – (b) Configuração Linear – (c) Configuração Não Linear



Fonte: O Autor

Com a nova configuração para as molas lineares, a Fig. 3.14 apresenta a resposta transiente do sistema nas três configurações.

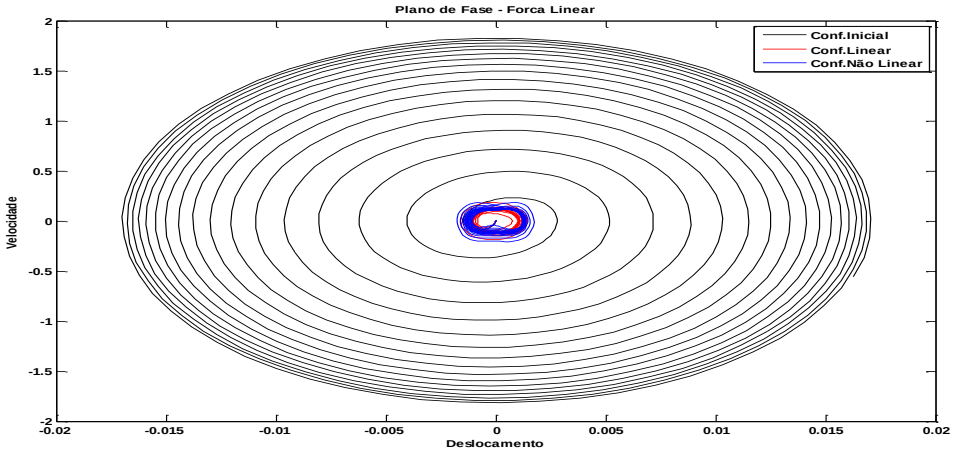
Figura 3. 14: Análise transiente referente as configurações da placa apresentadas na Fig. 3.13.



Fonte: O Autor

A Fig. 3.15 refere-se aos planos de fase das respostas obtidas pela Fig. 3.14.

Figura 3. 15: Plano de Fase referente a resposta apresentada pela Fig. 3.14.

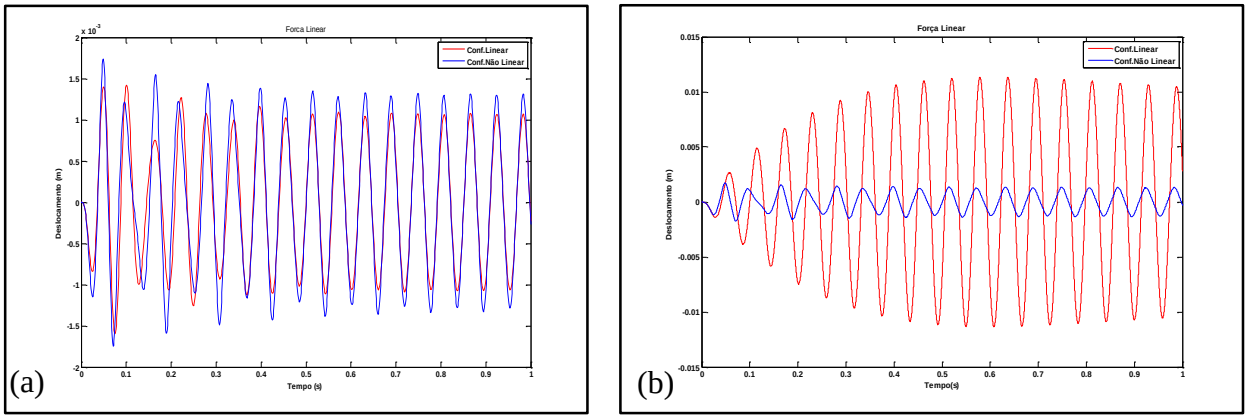


Fonte: O Autor

Na Fig. 3.14 pode-se perceber o comportamento da resposta para ambas as configurações. Nesta Figura, é possível perceber que, no caso onde se tem a configuração com apenas 2 molas com característica não linear, a amplitude do deslocamento é semelhante ao caso onde se tem 11 molas com características puramente lineares. Tal colocação é justificado observando o plano de fase mostrado na Fig. 3.15. Este resultado pode ser melhor visualizada na Fig. 3.16(a) que representa uma comparação da resposta entre o caso que se tem o acoplamento de duas molas com característica não linear e o caso onde se tem onze molas

lineares. Já na Fig. 3.16(b) representa a resposta do sistema com o acoplamento de duas molas com característica não linear e de duas molas lineares.

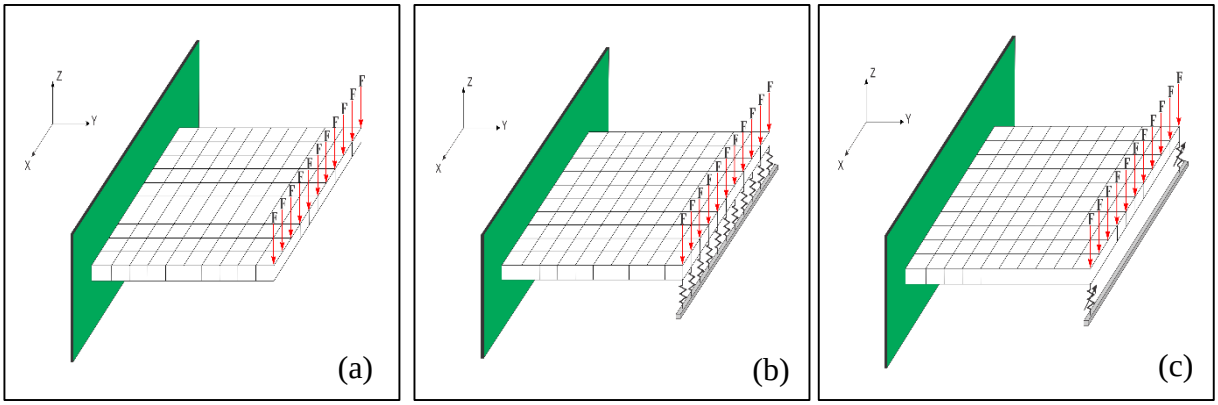
Figura 3. 16: Sistema com (a) com onze molas lineares (Conf.Linear) e duas molas com característica não linear (Conf.Não Linear) - (b) com duas molas lineares (Conf.Linear) e duas molas com característica não linear (Conf.Não Linear)



Fonte: O Autor

Agora, a placa de Reissner Mindlin é submetida à ação de forças pontuais em toda a extremidade da mesma, conforme apresentado na Fig. 3.17, sendo tal força é descrita pela Tabela 3.2.

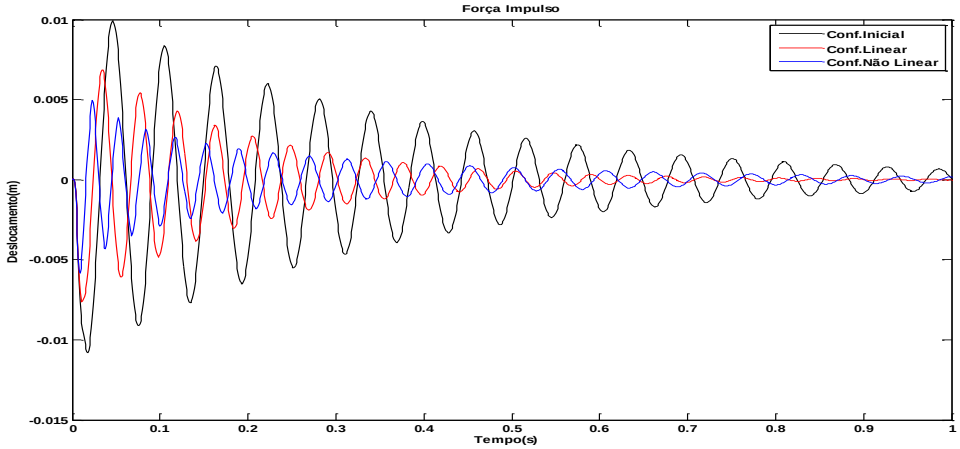
Figura 3. 17: Placa sujeita a ação de forças pontuais: (a) Configuração Inicial – (b) Configuração com Molas Lineares – (c) Configuração com Molas Não Lineares



Fonte: O Autor

A reposta transiente para cada configuração é apresentado nas Fig. 3.18.

Figura 3. 18: Análise transiente referente as configurações da placa apresentadas na Fig. 3.17.

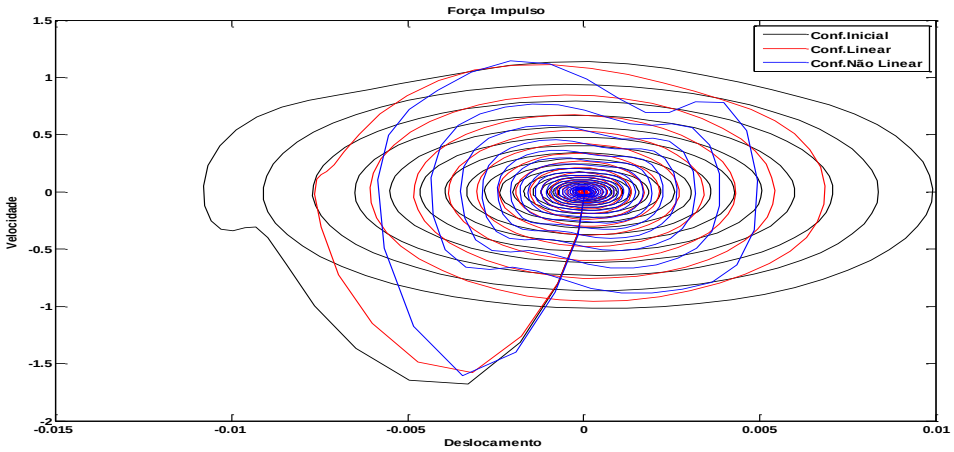


Fonte: O Autor

Nota-se na Fig. 3.18 que as respostas obtidas para o sistema, no caso do acoplamento de molas lineares e molas com características não lineares estão muito próximas; contudo, a utilização de molas com características não lineares ainda atenua melhor a vibração do sistema (curva em azul), quando comparado a resposta com molas puramente lineares (curva em vermelho).

Na Fig. 3.19, é apresentado o plano de fase para as respostas obtidas pela Fig. 3.18.

Figura 3. 19: Plano de Fase referente a resposta apresentada pela Fig. 3.18.



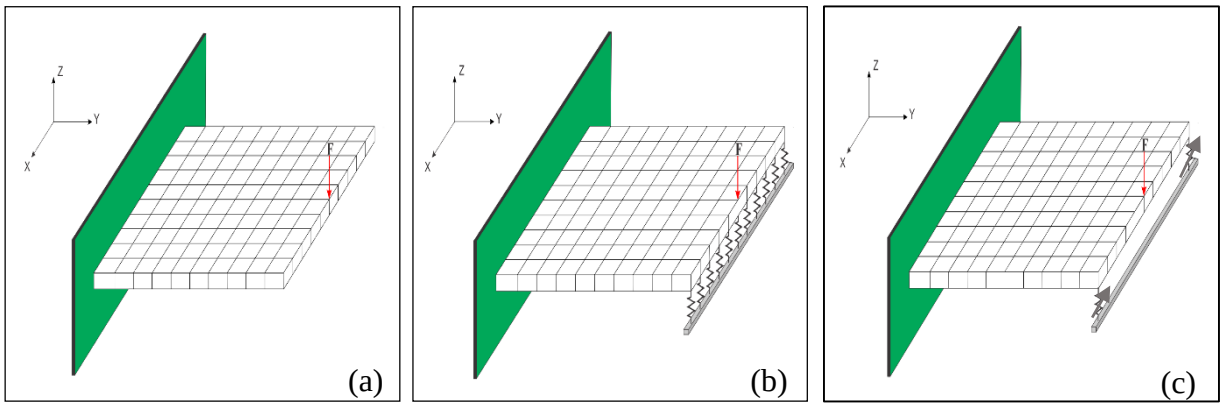
Fonte: O Autor

Na Fig. 3.19, pode-se observar que a inserção das molas com características não lineares (curva em azul) apresentou ciclos de respostas menores do que os comparados com as molas

lineares (curva em vermelho). Percebe-se ainda por esta figura que o comportamento do sistema é característico de sistemas não lineares.

Na Fig. 3.20, a placa de Reissner-Mindlin, é submetida a uma força harmônica não linear, conforme descrito na Tabela 3.2.

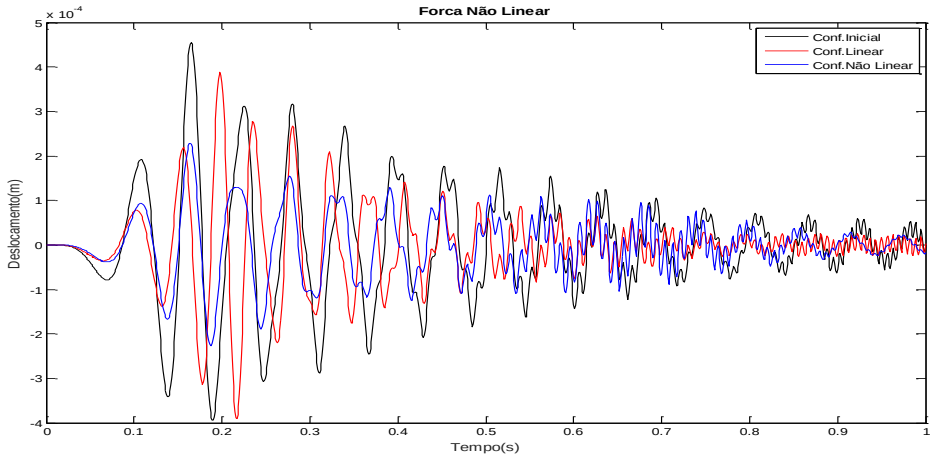
Figura 3. 20: : Placa sujeita a ação de força não linear: (a) Configuração Inicial – (b) Configuração com Molas Lineares – (c) Configuração com Molas Não Lineares



Fonte: O Autor

As respostas referentes a aplicação da força não linear é apresentada nas Fig. 3.21.

Figura 3. 21: Análise transiente da placa submetida a uma força não linear



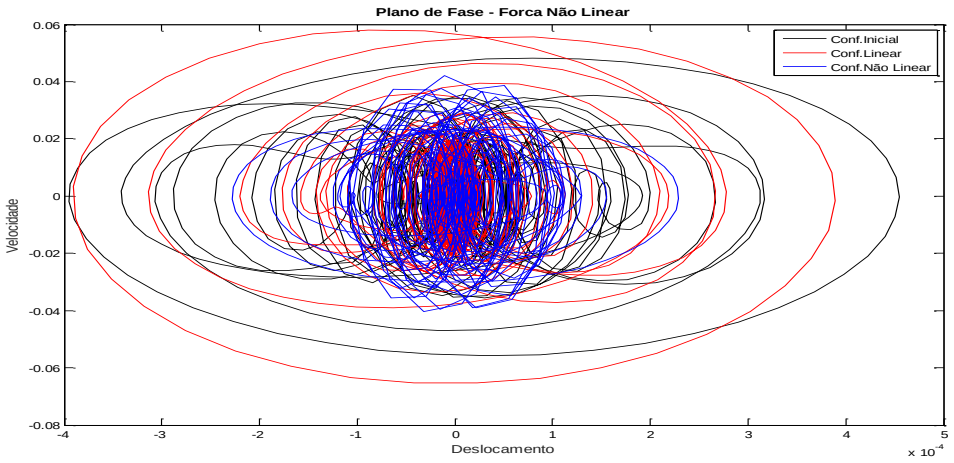
Fonte: O Autor

Com a característica não linear da força aplicada em cada configuração da Fig. 3.20, percebe-se que, inicialmente, a resposta referente a placa com molas com características não

lineares (curva em azul) é a que melhor atenua a vibração do sistema e, no decorrer do tempo, as duas respostas referentes as molas lineares (Fig. 3.21(b)) e molas com característica não lineares (Fig. 3.22(c)) muito se aproximam.

A Fig. 3.22, apresenta o comportamento de cada resposta exposta na Fig. 3.21:

Figura 3. 22: Plano de Fase referente a resposta apresentada pela Fig. 3.21.



Fonte: O Autor

O plano de fase apresentado na Fig. 3.22 demostra a proximidade entre as respostas para o sistema na configuração inicial (curva em preto) e o sistema com molas não lineares, sugerindo um comportamento caótico. Nas aplicações utilizando a placa de Reissner-Mindlin, salienta-se a eficiência de duas molas não lineares quando comparado com as onze molas lineares, na redução da amplitude do deslocamento do sistema.

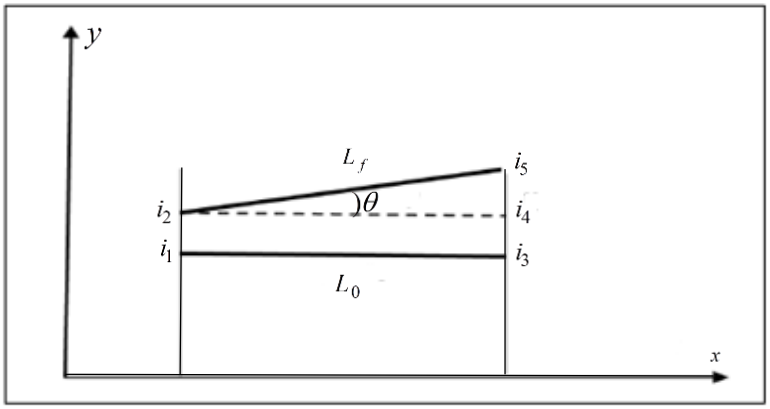
3.2 Modelagem de uma Estrutura do Tipo Viga, com Não Linearidade Geométrica

Neste capítulo, considera-se a formulação não linear, devido à grande deflexões. Embora a formulação apresentada considere que as deformações por flexão geram deslocamentos suficientemente grandes para que haja interação com as deformações segundo o eixo da viga, considera-se que o material continua a apresentar um comportamento elástico, no qual o elemento recupera as suas dimensões após a ação das forças externas. (SIMÕES, 2011, REDDY, 1993)

Com o avanço no desenvolvimento de materiais, tem crescido os estudos voltados a estruturas capazes de suportar grandes deslocamentos. Dessa maneira, o desenvolvimento de modelos eficientes, proporcionam uma simulação mais realista, evitando catástrofes provenientes das propriedades não lineares desses materiais.

Para modelar os deslocamentos sujeitos a grandes deflexões, considera-se a Fig. 3.23 a seguir:

Figura 3. 23: Grandes deslocamentos devido a flexão



Fonte: Adaptado de Simões (2011)

De acordo com a Fig. 3.3, quando a viga apresentar uma inclinação devido à flexão, é necessário que a sua linha média se alongue de modo que os nós extremos se mantenham sobre as linhas paralelas ao eixo *y*. Para os sistemas lineares, essa hipótese é normalmente desprezada, mas para a formulação de grandes deslocamentos devido a flexão, deve-se incluir essa deformação nas equações do sistema (SIMÕES, 2011).

Sendo $L_0 = i_3 - i_1$ o comprimento inicial da viga. Já o comprimento final L_f é dada pela Eq. (3.6) obtida a partir do triangulo retângulo ($i_2 i_4 i_5$):

$$L_f = \frac{L_0}{\cos(\theta)} \tag{3.6}$$

A deformação real, na direção *x*, é dada pela variação do comprimento:

$$\varepsilon_x = \frac{\frac{L_0}{\cos(\theta)} - L_0}{\frac{L_0}{\cos(\theta)}} = 1 - \cos(\theta) \tag{3.7}$$

O termo $\cos(\theta)$ pode ser desenvolvido através da série de Taylor (considerando (θ) pequeno) (SIMÕES, 2011):

$$\varepsilon_x = 1 - \cos(\theta) \cong \frac{\theta^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\tilde{v}}{dx}\right)^2 \tag{3.8}$$

Onde $\tilde{v}$ é a função de aproximação dos deslocamentos transversais (polinômio de terceira ordem).

Dessa forma, a Eq. (3.8) é adicionada a expressão da deformação axial devido a ação de forças do eixo da viga. Dessa forma, a expressão completa é dada por (URUGAL, 1981; REDDY, 1993; GONÇALVES, 2006; SIMÕES, 2011):

$$\varepsilon_x = \frac{du_x}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\tilde{v}}{dx}\right)^2 \tag{3.9}$$

Sendo que u_x são os deslocamentos axiais.

Como a viga de Euler-Bernoulli foi modelada considerando os deslocamentos transversais e as rotações, o termo referente aos deslocamentos axiais na Eq. (3.9) é desprezado, dando origem a Eq. (3.10) (GONÇALVES, 2006).

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2}\left(\frac{d\tilde{v}}{dx}\right)^2 \tag{3.10}$$

Gonçalves (2006) apresentou a modelagem de uma viga de Euler-Bernoulli com não linearidade geométrica devido a grandes deflexões. Neste caso, uma análise estática pelo método dos elementos finitos foi apresentada, para três tipos de materiais, o aço, o alumínio e o acrílico.

Esses três materiais foram analisados para vigas cujas a relação espessura/comprimento é de 0.016 e 0.1, no qual, para vigas mais espessas, a formulação não linear apresentava resultados diferentes da formulação linear. Já para o caso da viga menos espessa, tanto a formulação linear quanto a formulação não linear, apresentaram a mesma resposta.

Levando em conta as considerações feita por Reddy (1983), Gonçalves (2006) e Simões (2011), procurou-se desenvolver uma análise dinâmica do sistema não linear,

Pela lei de Hooke, que relaciona a tensão com a deformação, tem-se:

$$\sigma = E\varepsilon_x \tag{3.11}$$

Lembrando que, conforme apresentado no capítulo 2, seção 2.1, tem-se:

$$\theta = \frac{d\tilde{v}}{dx} = 0 + c_2 + 2c_3 x + 3c_4 x^2 \tag{3.12}$$

Podendo ser reescrito como:

$$\theta = [0 \quad 1 \quad 2x \quad 3x^2] \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} \tag{3.13}$$

Ou:

$$\theta = [S]\{c\} \tag{3.14}$$

Os parâmetros c_i podem ser relacionados com os deslocamentos nodais:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{v}_1 \\ \theta_1 \\ \tilde{v}_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 0 & 1 & 2x_1 & 3x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_3^2 \\ 0 & 1 & 2x_2 & 3x_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} \tag{3.15}$$

Ou seja:

$$\{u\} = [J]\{c\} \tag{3.16}$$

Em que $[J]$ é dada pelas incógnitas do polinômio cúbico interpolador, referente aos deslocamentos e as rotações no elemento.

Dessa maneira, o vetor $\{c\}$ pode ser expresso como:

$$c = [J]^{-1}\{u\} \tag{3.17}$$

E equação. 3.14 é dada por:

$$\theta = [S][J]^{-1}\{u\} \tag{3.18}$$

A expressão para a energia potencial devido a deformação não linear é dada por (GONÇALVES, 2006):

$$\prod_{não linear} \frac{bh}{2} \int_0^l \left(\frac{d\tilde{v}}{dx} \right)^2 \sigma dx \tag{3.19}$$

Como a matriz de rigidez da viga de Euler Bernoulli já foi calculada no capítulo 2 e, assim, pode-se encontrar a matriz de rigidez não linear, resolvendo a Eq. (3.19):

$$[K^{geo}] = \frac{bh}{2} \{u\}^T [J]^{-1} \left(\int_0^l [S]^T \sigma [S] dx \right) [J]^{-1} \{u\} \tag{3.20}$$

Dessa maneira, pode-se observar, que $[K^{geo}]$ é a matriz de rigidez devido a não linearidade geométrica, sendo uma função dos deslocamentos nodais {u}, e que devem ser atualizadas a cada passo de tempo.

As equações do movimento, são dadas por:

$$[M^g]\{\ddot{u}^g(t)\} + [K^g]\{u^g(t)\} = F^g \tag{3.21}$$

Em que $[K^g] = [K^v] + [K^{geo}]$, sendo $[K^v]$ a matriz de rigidez do elemento de viga de Euler-Bernoulli, apresentada no Capítulo 2, na seção 2.1.

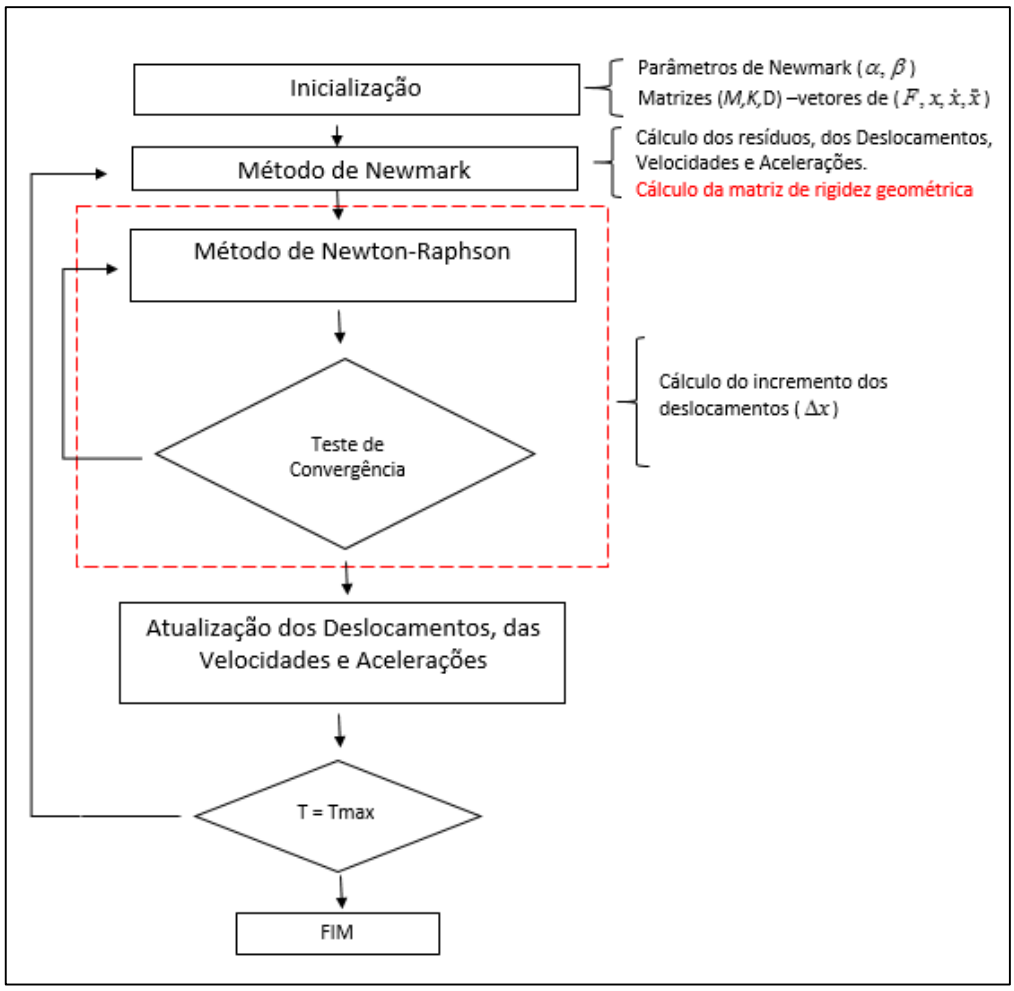
A seguir, são apresentadas as simulações numéricas, a fim de comprovar a necessidade ou não do uso da formulação não linear para o alumínio e o acrílico.

3.2.1. Simulações envolvendo uma Viga com Não Linearidade Geométrica

Considera-se uma viga engastada livre, sujeita a aplicação de força harmônica linear em sua extremidade.

O algoritmo de Newmark com Newton Raphson para o caso da viga com não linearidade geométrica é apresentado abaixo.

Algoritmo 3. 2: Método de Newmark com Newton Raphson para sistemas com não linearidade geométrica



Fonte: O autor

A seguir, são apresentados na Tabela 3.3, as propriedades da viga de Euler-Bernoulli com características geometricamente não lineares.

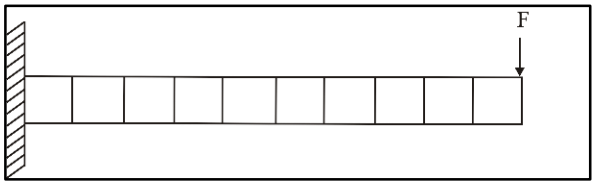
Tabela 3. 3: Forças, propriedades físicas e geométricas da viga

Propriedades	Geometria	Comprimento (m)	2.5	
		Largura (m)	0.1	
		Espessura (m)	0.04	
	Físicas		Alumínio	Acrílico
		Densidade (Kg/m^3)	2700	1130
		Modulo de Elasticidade (GPa)	69	3.24
Forças		Força Linear		
		$f(t) = F\sin(\pi\omega t)$	$F = \begin{cases} 1N \\ 10N \\ 50N \\ 100N \end{cases}$	

Fonte: O Autor

Conforme apresentado na Tabela 3.3, dois materiais são modelados com não linearidade geométrica, o alumínio e o acrílico. De acordo com cada tipo de configuração apresentada, podem ser aplicadas três tipos de força, onde (ω) é a primeira frequência natural do sistema. Conforme apresentado na Tabela 3.3, a amplitude da força aplicada se torna maior, 1N, 10N, 50N e 100N em cada simulação, na qual a modelagem não linear é mais importante principalmente para cargas de forças com maior amplitude (GONÇALVES, 2006; REDDY, 1993). A Fig. 3.24, representa o modelo de viga utilizado, sendo que a mesma está engastada na sua extremidade *x=0*, e livre sobre a ação de forças externas na extremidade *x=l*.

Figura 3. 24: Viga de Euler-Bernoulli

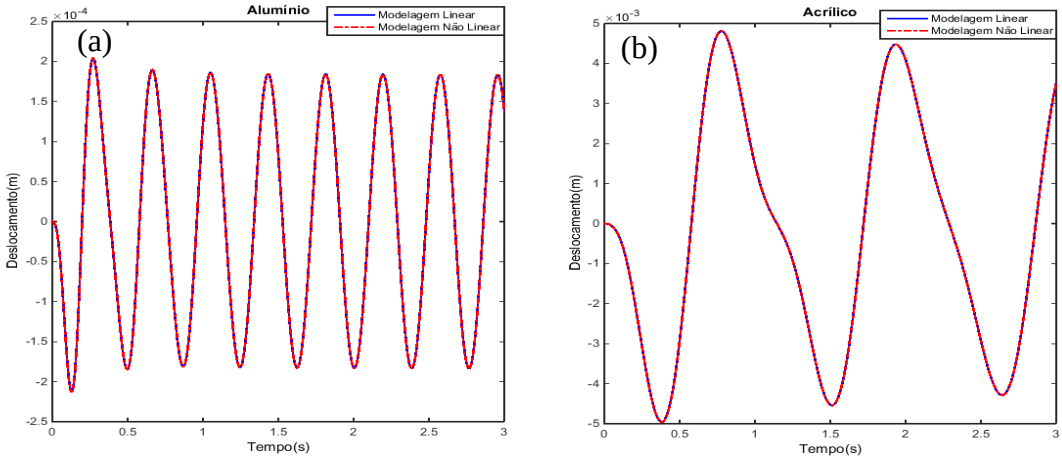


Fonte: O Autor

Os resultados apresentados a seguir referem-se a comparação da modelagem linear (capítulo 2 – seção 2.1) e da modelagem não linear (capítulo 3 – seção 3.2), para os dois tipos de materiais (alumínio e acrílico), com a aplicação de cada força.

Na Fig. 3.25, a amplitude da força considerada foi igual a 1N.

Figura 3. 25: Força Linear : 1N - (a): Alumínio - (b) Acrílico

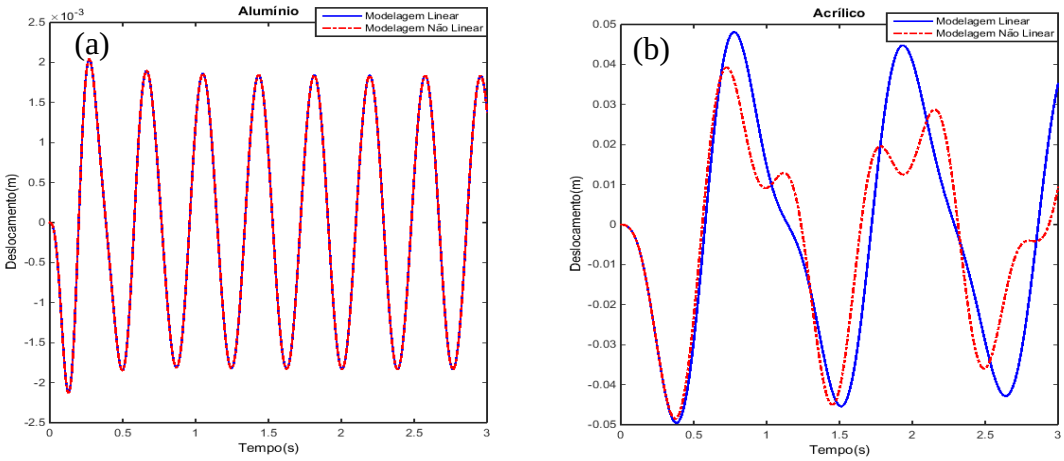


Fonte: O Autor

Quando a viga está sujeita a uma força muito pequena, como no caso da Fig. 3.25, os resultados utilizando tanto a modelagem linear quanto a modelagem não linear são os mesmos.

Aumentando a amplitude da força aplicada na viga para 10N, percebe-se que o sistema já não apresenta mais o comportamento linear descrito anteriormente, ou seja, sugem as não linearidades devido ao deslocamento desta viga. Tais resultados podem ser observados pela Fig. 3.26, .

Figura 3. 26: Força Linear : 10N - (a): Alumínio - (b) Acrílico

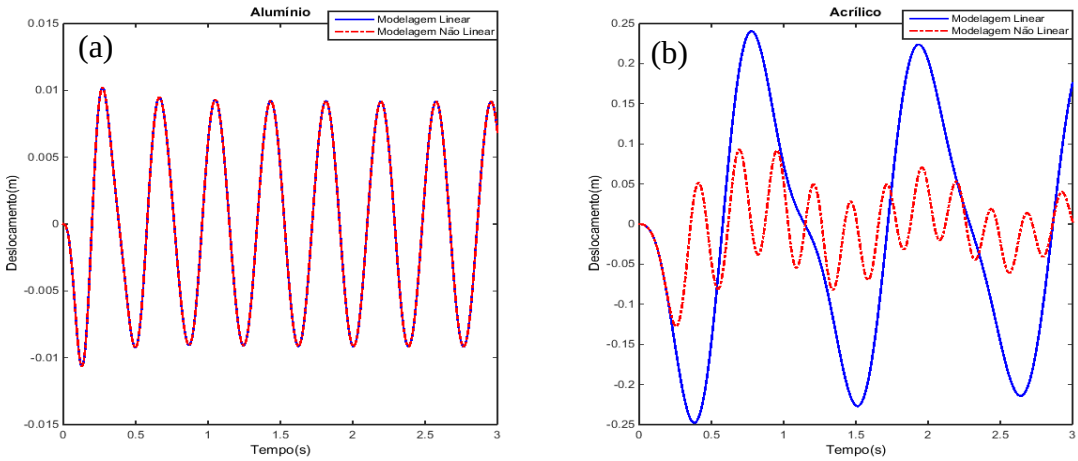


Fonte: O Autor

Nesse caso, a viga de alumínio, Fig. 3.26(a) não apresenta variação na resposta quando se compara as duas modelagens, o que não acontece para a viga de acrílico, Fig. 3.26(b), cuja a resposta devido a modelagem não linear (curva em vermelho) apresentou uma diferença significativa em comparação a modelagem linear (curva em azul).

Os resultados apresentados na Fig. 4.27, considera que a amplitude da força seja aumentada de 10N para 50N.

Figura 3. 27: Força Linear : 50N - (a): Alumínio - (b) Acrílico

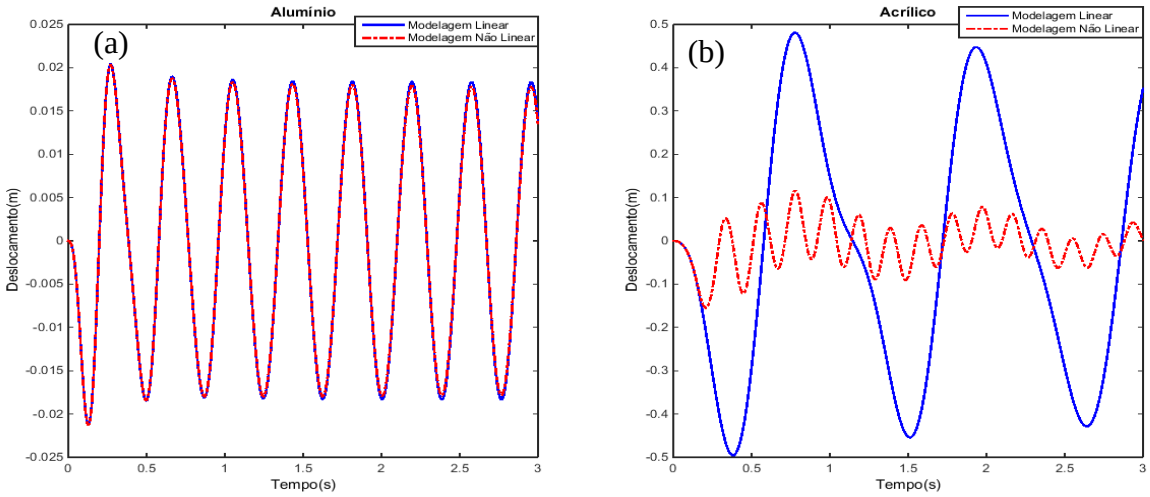


Fonte: O Autor

Aumentando a amplitude da força para 50N, a viga de acrílico, Fig. 3.27(b) apresentou de forma mais evidente, a diferença na resposta entre as duas modelagens, linear (curva em azul) e não linear (curva em vermelho). Já para a viga de alumínio, a diferença entre as duas modelagens, ainda não pôde ser percebida pela Fig. 3.27(a).

Para o caso que segue, a amplitude da força foi aumentada para 100N, cuja respostas estão expostas na Fig. 3.28.

Figura 3. 28: Força Linear – 100N - (a): Alumínio - (b) Acrílico



Fonte: O Autor

No mesmo sentido que as simulações anteriores (Figs. 3.26 e 3.27), a viga de acrílico exposta na Fig. 3.28(b) apresentou maior variação entre a reposta através da modelagem linear (curva em azul) e a modelagem não linear (curva em vermelho), no qual quanto mais a amplitude da força é aumentada, maior se tornava a diferença entre as duas modelagens.

A modelagem linear para caso da viga de acrílico, superestima as respostas do sistema (GONÇALVES, 2006).

Para a viga de alumínio, Fig. 3.28(a), pode-se notar que a modelagem não linear (curva em vermelho) começa a diferenciar da modelagem linear (curva em azul), observada principalmente de 2.5s a 3s, mesmo que ainda seja forma tímida.

Levando em conta as forças aplicadas, a necessidade da formulação não linear se torna mais importante quando a amplitude da força é aumentada, conforme evidenciado por alguns autores (GONÇALVES, 2006; SIMÕES, 2011; GERGES, 2013).

No alumínio, o efeito da modelagem não linear foi notado somente com a aplicação da força com amplitude de 100N, o que não aconteceu com o acrílico, que com menores amplitudes de força, a resposta sofre grande influência devido a modelagem não linear.

A diferença entre os materiais, pode ser verificada pelas propriedades próprias de cada um pois, sugere-se que o alumínio sendo mais rígido, apresentou menor amplitude do deslocamento quando submetido a certo valor de força, ao contrário do que ocorreu com o acrílico por ser mais flexível.

Capítulo 4

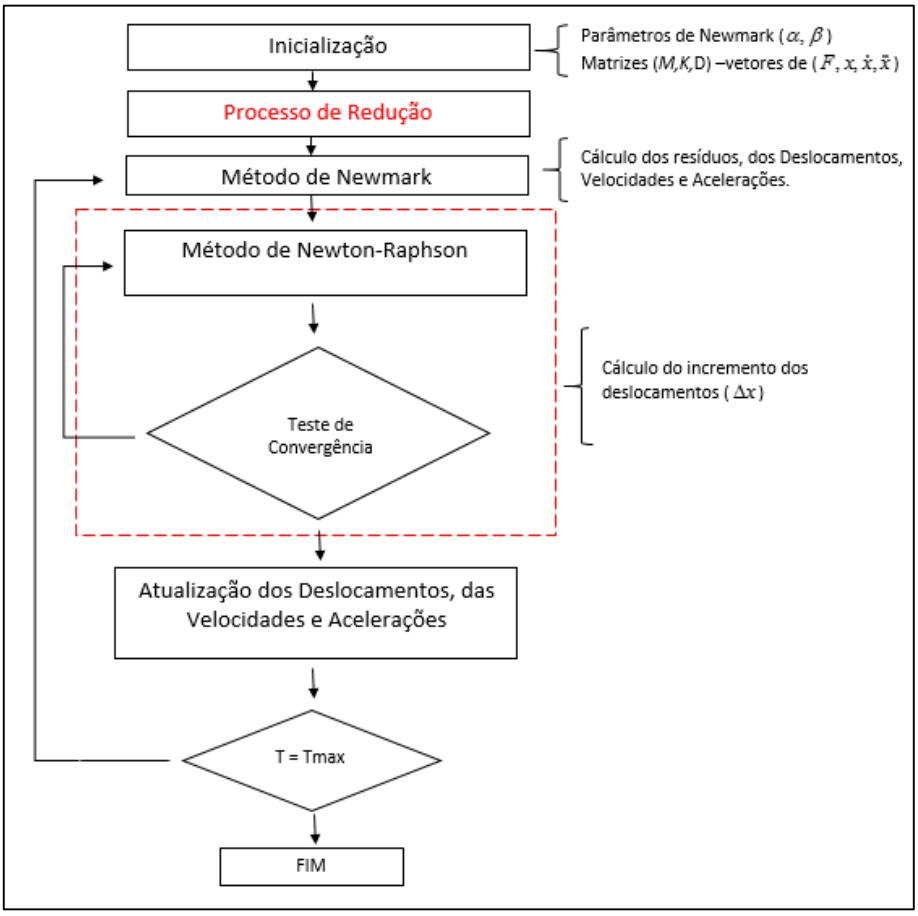
4. APLICAÇÃO DOS MÉTODOS DE REDUÇÃO DE MODELOS

Conforme apresentado no Capítulo 2, na seção 2.3, os métodos de redução são utilizados para melhorar o tempo de execução das simulações.

Com o objetivo de se obter a resposta para cada sistema em um tempo de execução menor, mantendo o comprometimento entre as respostas do sistema reduzido e do sistema original, são apresentadas as respostas para os sistemas envolvendo uma viga de Euler-Bernoulli e uma Placa de Reissner-Mindlin, conforme apresentadas no Capítulo 3.

As simulações apresentadas a seguir, foram executas em ambiente Matlab®, utilizando o método de Newmark combinado com Newton-Rapshon (GAVIN, 2014; RAO, 2008; CHOPRA, 1995), conforme apresentado no Algoritmo 4.1, cuja o passo de tempo é de $\Delta t = 0.0001$, os parâmetros α e β de Newmark com valores de 0.5 e 0.25 respectivamente. As configuração da máquina utilizada para a execução das simulações foram: Notebook Dell com processador Intel Core i7, HD de 1 Tera e memória ram de 8Gb, com placa de vídeo dedicada AMD Radeon R7 M265 de 2GB.

Algoritmo 4. 1: Newmark com Newton Raphson utilizando métodos de redução de modelos



Fonte: O Autor

4.1. Viga de Euler-Bernoulli

Primeiramente, os métodos IRS, IIRS e IRSE são aplicados para a viga de Euler-Bernoulli, nas configurações estudadas no Capítulo 3, seção 3.1.1.

Na Tabela 4.1, são apresentadas as propriedades físicas e geométricas da viga de das molas consideradas nas simulações a seguintes, bem como, o tipo de força aplicado em cada caso.

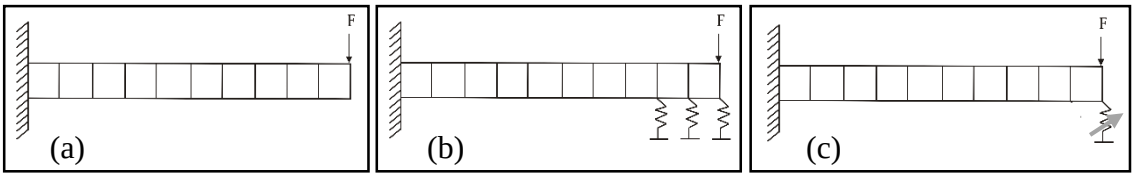
Tabela 4. 1: Forças, propriedades físicas e geométricas da viga

Propriedades	Geometria	Comprimento (m)	2.5
		Largura (m)	0.1
		Espessura (m)	0.04
		Rigidez da mola linear	800 N/m
		Rigidez da mola não linear	10^9 N/m^3
	Físicas	Densidade (Kg/m^3)	2700
		Modulo de Elasticidade (GPa)	69
Forças		Força Linear	Força Não Linear
		$f_{1H}(t) = 50\sin(\pi \omega t)$	$f_{2H}(t) = 160t\sin(60\pi t^2)$

Fonte: O Autor

As configurações utilizadas para aplicar cada método de redução, são exibidas na Fig. 4.1 sendo que: Fig. 4.1(a) representa a viga submetida somente a ação da força linear conforme descrita na Tabela 4.1, na Fig. 4.1(b) está acoplada a viga, três molas lineares e na Fig. 4.1(c), está acoplado a viga, uma mola com característica não linear.

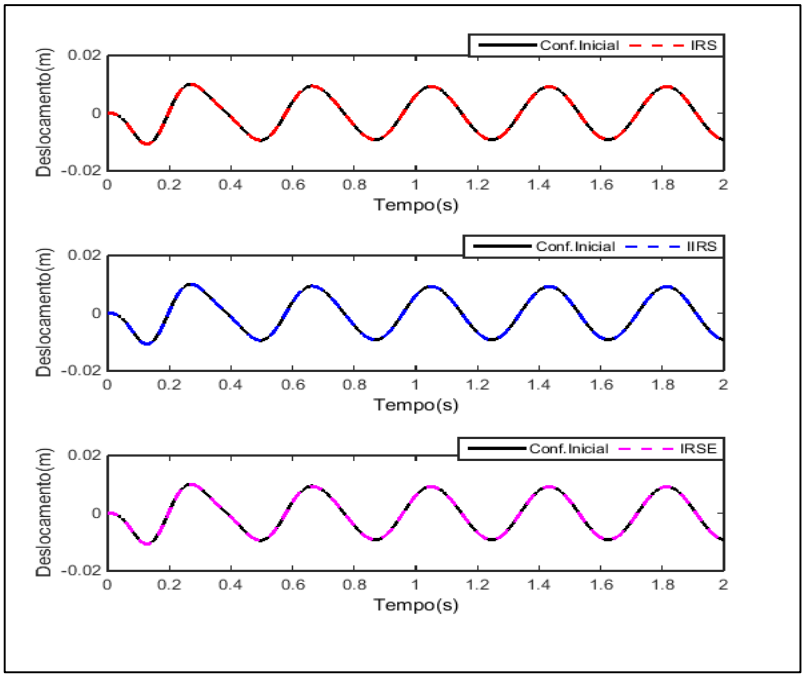
Figura 4. 1: Configurações da Viga de Euler – Bernoulli - (a) Configuração Inicial – (b) Configuração Linear – (c) Configuração Não Linear



Fonte: O Autor

As respostas, obtidas por cada método de redução, levando em conta a configuração inicial do sistema (Fig. 4.1(a)) são exibidas pela Fig. 4.2.

Figura 4. 2: Métodos de Redução: Força Linear – Configuração Inicial

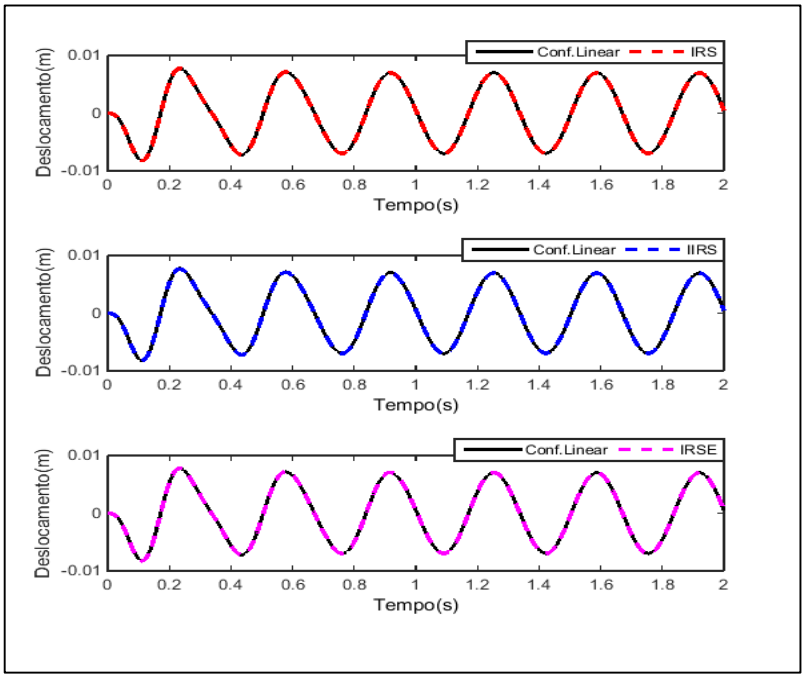


Fonte: O autor

Os resultados apresentados pela Fig. 4.2, demostra que os três métodos de redução apresentaram respostas condizente com a resposta do sistema sem redução.

Já na Fig. 4.3, a reposta é obtida levando em conta a configuração linear do sistema (Fig. 4.1(b)).

Figura 4. 3: Métodos de Redução: Força Linear – Configuração Linear

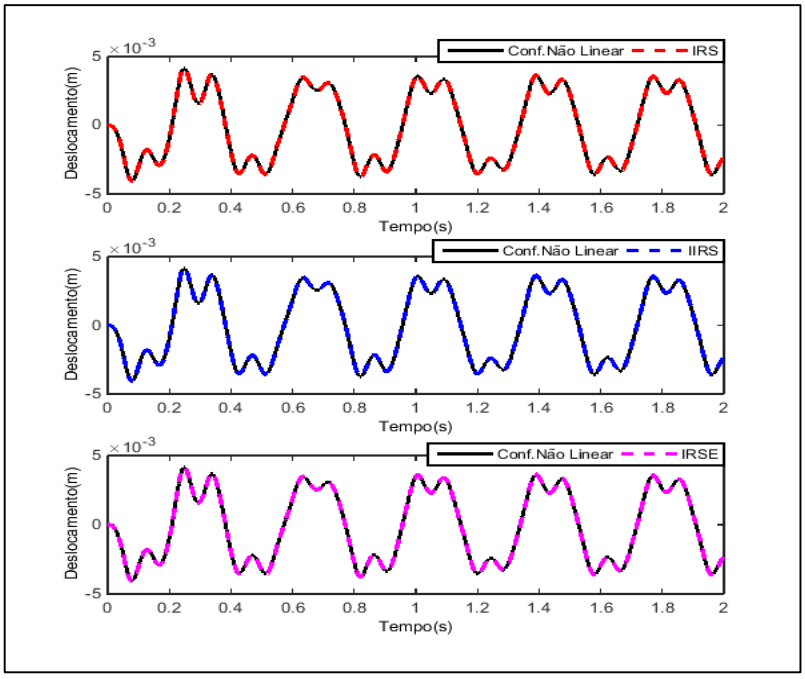


Fonte: O autor

Nota-se que para o caso em que são acoplados as molas lineares na viga, a resposta obtida pelos métodos de redução, foram as mesmas obtida pelo sistema sem redução.

Agora, na Fig. 4.4 é comparado a resposta obtida pelos métodos de redução para a configuração não linear do sistema (Fig. 4.1(c)), em que esta acoplada a viga, uma mola não linear.

Figura 4. 4: Métodos de Redução: Força Linear – Configuração Não Linear



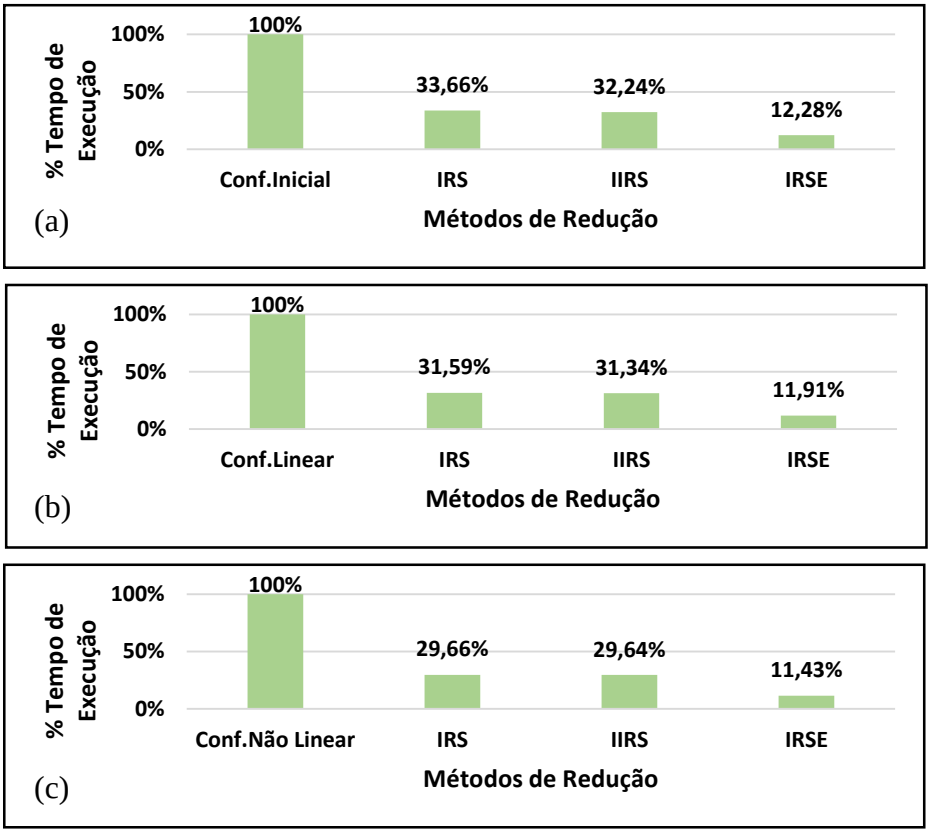
Fonte: O autor

Mesmo para o sistema em que são considerados a mola não linear, os método IRS, IIRS e IRSE apresentaram respostas condizentes com a resposta apresentada pelo sistema sem a utilização dos métodos de redução.

Nesse sentido, o uso dos métodos de redução, não provoca alterações nas respostas dos sistemas, visto que as respostas apresentada para a viga engastada livre, com molas lineares e com mola não linear sem o uso de algum método de redução, foram as mesmas exibidas levando em conta a aplicação dos métodos IRS, IIRS e IRSE.

Na Fig. 4.5, é comparado a porcentagem do tempo que cada método de redução obteve em comparação aos resultados de cada configuração.

Figura 4. 5: Porcentagem do tempo de execução de cada método (a) Configuração Inicial – (b) Configuração Linear – (c) Configuração Não Linear



Fonte: O autor

De encontro aos resultados apresentados nas Figs. 4.2, 4.3 e 4.4, foi calculado a porcentagem do tempo de execução que cada método de redução apresentou, com relação ao sistema para cada configuração. Esses resultados apresentados na Fig. 4.5, em que notoriamente, todos os métodos apresentaram uma economia de tempo de execução significativa, chegando a quase 89% com o método IRSE.

O IRSE apresentou em todas as configurações as melhores economias de tempo, seguido do IIRS e por último, porém como uma boa economia de tempo, o IRS.

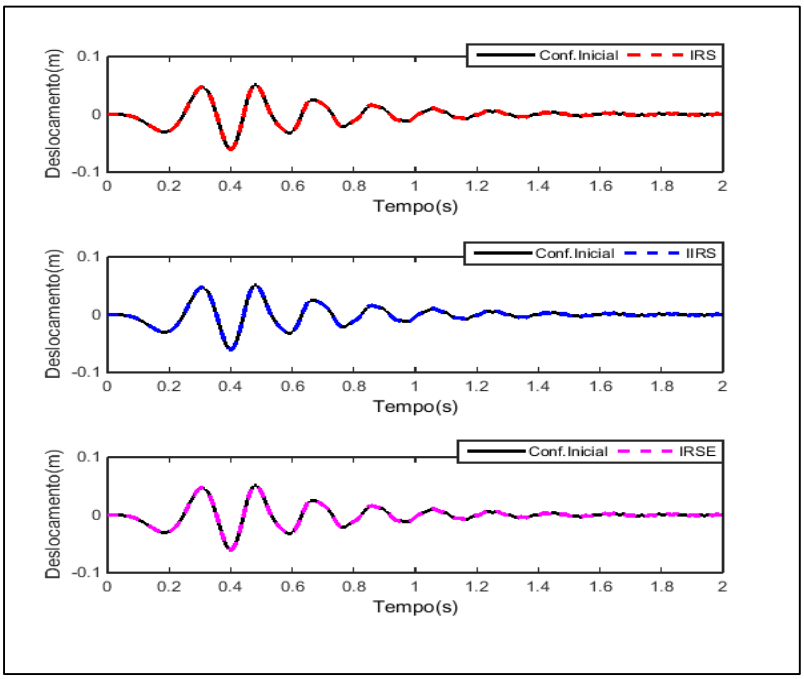
Apesar dos resultados animadores apresentados para a viga de Euler-Bernoulli, demais simulações serão apresentadas a seguir, a fim de comparar as respostas e verificar se ambos os métodos possuem a relação entre a aproximação versus tempo tão eficientes conforme os resultados apresentados para a viga descrita na Fig. 4.1.

Considerando ainda a viga descrita na Fig. 4.1, na configuração inicial, linear e não linear, sendo que a viga está agora submetida a ação da força não linear descrita na Tabela 4.1,

os resultados a seguir, são referentes aos obtidos com a aplicação dos métodos IRS, IIRS e IRSE para esse novo sistema.

As respostas exibidas na Fig. 4.6, são referentes a configuração inicial sujeito a ação da força não linear.

Figura 4. 6: Métodos de Redução: Força Não Linear – Configuração Inicial

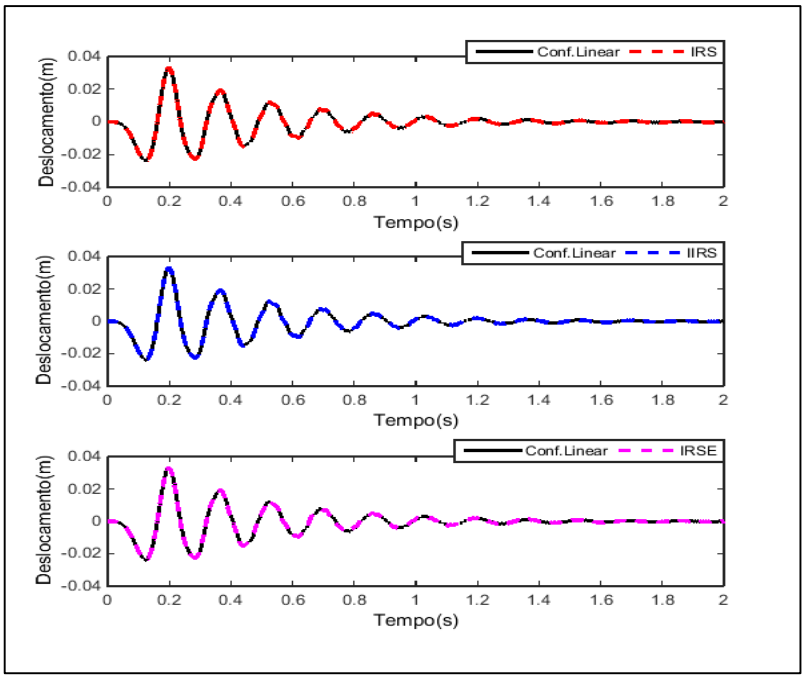


Fonte: O autor

Para a configuração inicial, os três métodos de redução apresentaram respostas semelhantes a do sistema sem o uso dos métodos de redução.

A seguir, na Fig. 4.7, considera-se a configuração linear do sistema, ou seja, são acoplada a vigas três molas lineares, com força não linear aplicada na extremidade da viga.

Figura 4. 7: Métodos de Redução: Força Não Linear – Configuração Linear

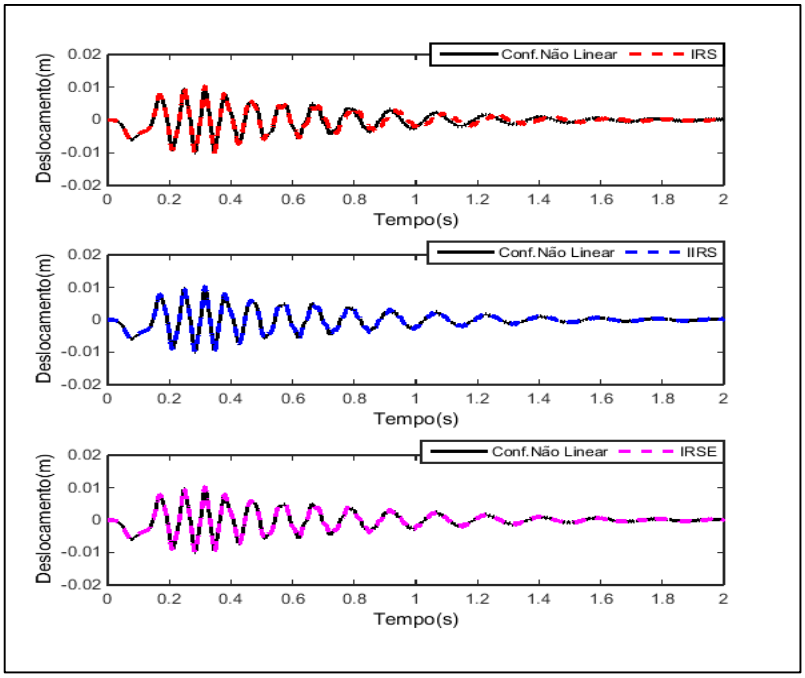


Fonte: O autor

Assim como apresentado para a configuração inicial, os métodos IRS, IIRS e IRSE exibiram respostas semelhantes as encontradas pelo sistema na configuração linear, sem a utilização de algum método de redução.

É apresentado agora, na Fig. 4.8, as respostas obtidas pelos métodos de redução referente a configuração não linear, em que é acoplada na extremidade da viga, uma mola com característica não linear.

Figura 4. 8: Métodos de Redução: Força Não Linear – Configuração Não Linear



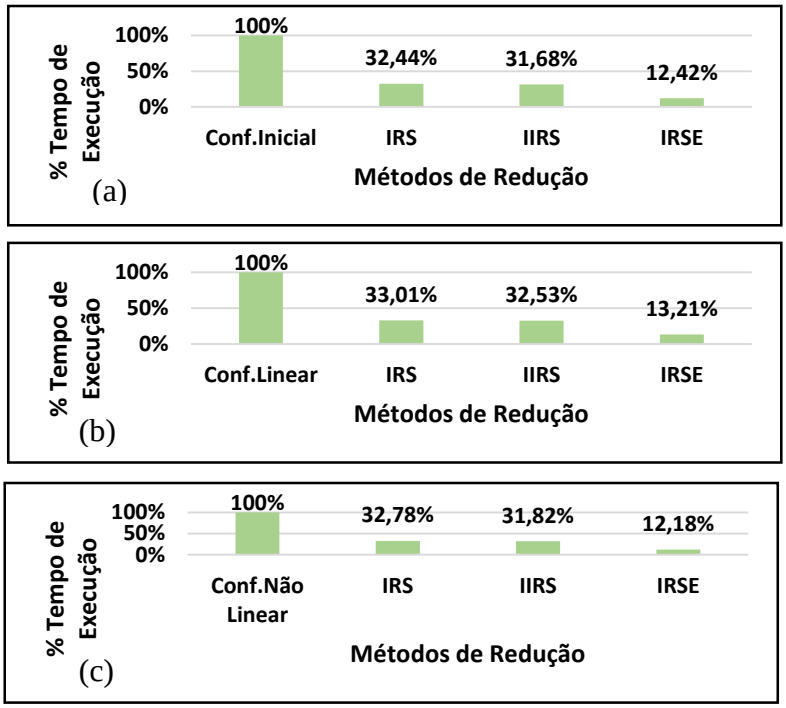
Fonte: O autor

Na Fig. 4.8 pôde-se perceber que o método IRS apresentou, mesmo que pequena, uma discrepância em relação a sua resposta e a resposta do sistema sem a utilização de algum método de redução, discrepância essa não apresentada pelos método IIRS e IRSE.

Sobretudo, bons resultados foram alcançados pelos métodos IRS, IIRS e IRSE, quando foi aplicado no sistema uma força não linear, sendo condizentes as respostas obtidas por cada método de redução e as respostas obtidas pelo sistema sem os método de redução.

Na Fig. 4.9 é apresentada a porcentagem do tempo de execução de cada método de redução, quando comparado ao sistema na configuração inicial, na configuração linear e na configuração não linear.

Figura 4. 9: Porcentagem do tempo de execução de cada método (a) Configuração Inicial – (b) Configuração Linear – (c) Configuração Não Linear



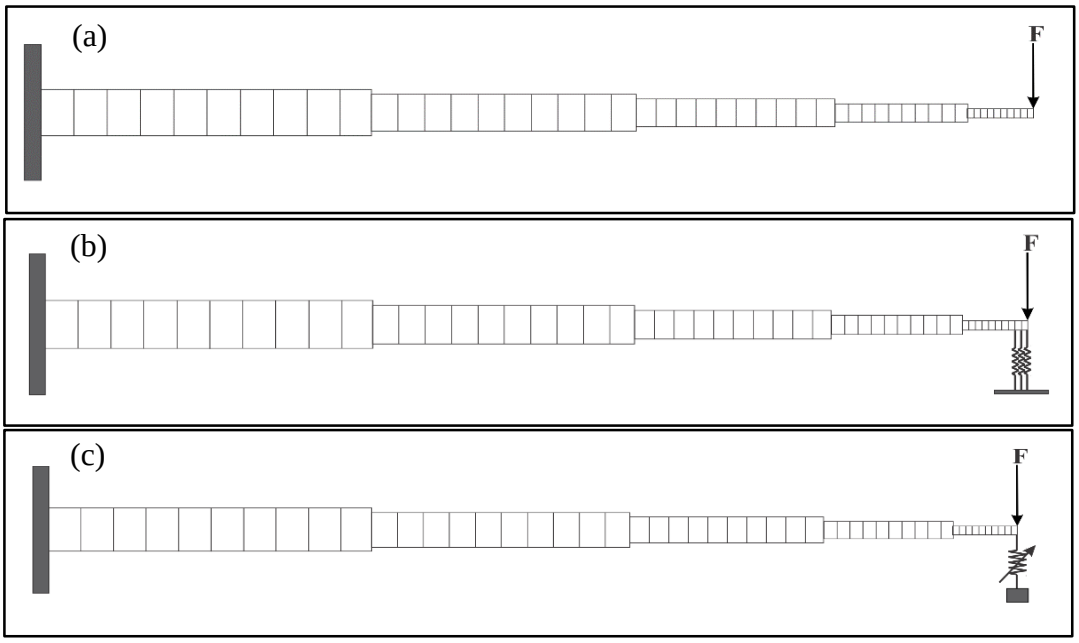
Fonte: O autor

Conforme pode ser visto na Fig. 4.9 todos os métodos de redução exibiram um tempo de execução muito menor que o apresentado pelo sistema completo. O método IRS, dependendo da configuração do sistema, apresentou o tempo de execução entre 32,78% à 33,01%, chegando a uma economia de tempo de aproximadamente 67%.

O métodos IIRS, por sua vez, apresentou resultados próximos a do método IRS, cuja economia também foi superior a 67%. Já o método IRSE, que foi desenvolvido neste trabalho, obteve uma economia de tempo de aproximadamente 87%, ou seja, gastando em média aproximadamente 13% do tempo de execução do sistema em cada configuração, proporcionando uma economia de aproximadamente 20% superior aos métodos IRS e IIRS.

Nas próximas simulações, considera-se a viga escalonada, conforme a Fig. 4.10.

Figura 4. 10:Viga Escalonada: (a) Configuração Inicial – (b) Configuração Linear – (c) Configuração Não Linear

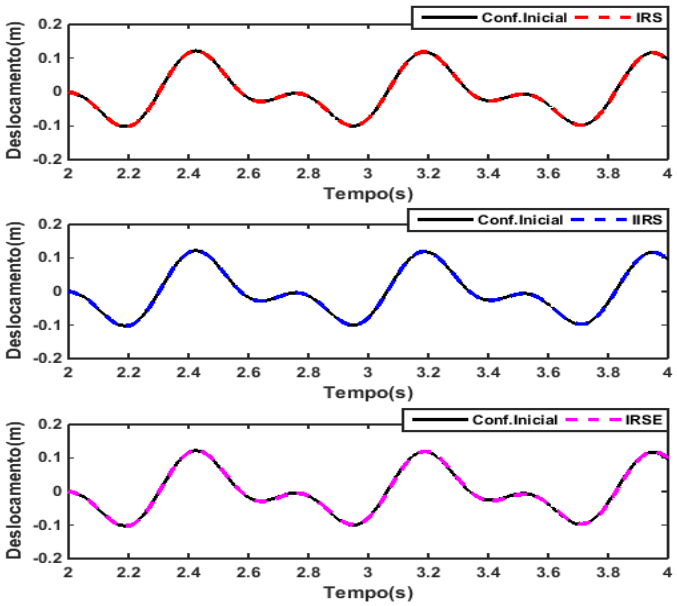


Fonte: O Autor

A força aplicada na extremidade da viga, é do tipo linear, conforme está descrito na Tabela 4.1.

Os resultados utilizando os métodos de redução para a configuração inicial, é exibido na Fig. 4.11.

Figura 4. 11: Métodos de Redução - Força Linear – Configuração Inicial

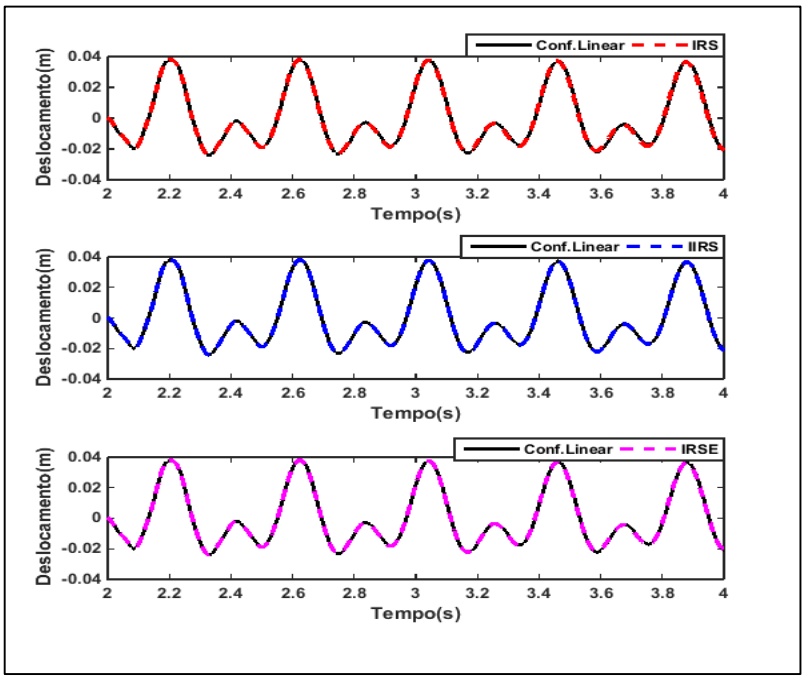


Fonte: O Autor

Para a configuração inicial, obteve respostas semelhantes tanto para o sistema sem redução quanto utilizando os métodos IRS, IIRS e IRSE.

Agora, na Fig. 4.12, tais métodos foram aplicados a viga, utilizando a configuração linear, Fig 4.10(b).

Figura 4. 12: Métodos de Redução - Força Linear - Conf.Linear

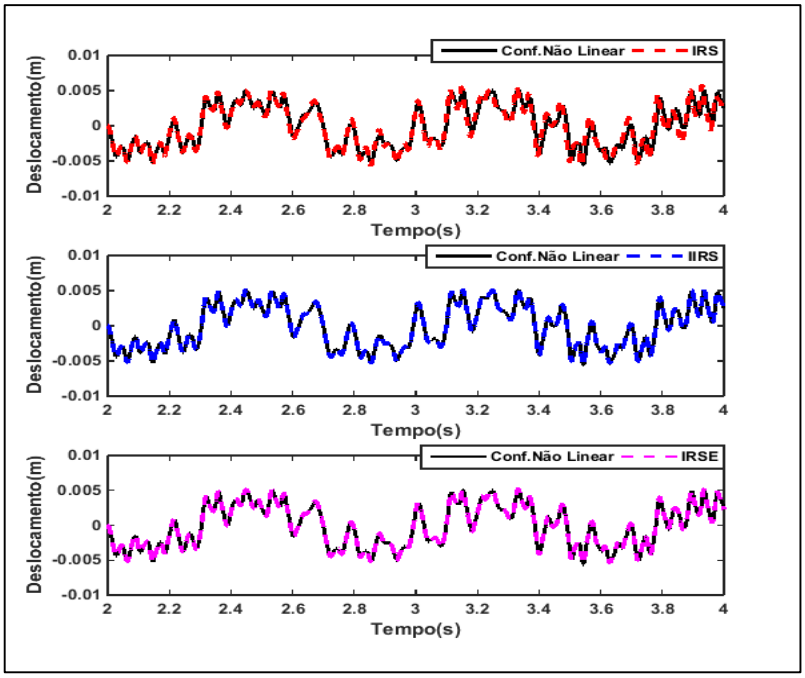


Fonte: O Autor

Assim como exposto pela Fig. 4.11 para a configuração inicial, a Fig. 4.12, representando a configuração linear, também obteve-se bons resultados utilizando os métodos IRS, IIRS e IRSE.

Na figura seguinte, Fig. 4.13, é considerado que a viga esta acoplada com uma mola não linear na sua extremidade, conforme é exibido na Fig. 4.10(c), combinado com a utilização dos métodos de redução IRS, IIRS e IRSE.

Figura 4. 13: Métodos de Redução - Força Linear – Configuração Não Linear

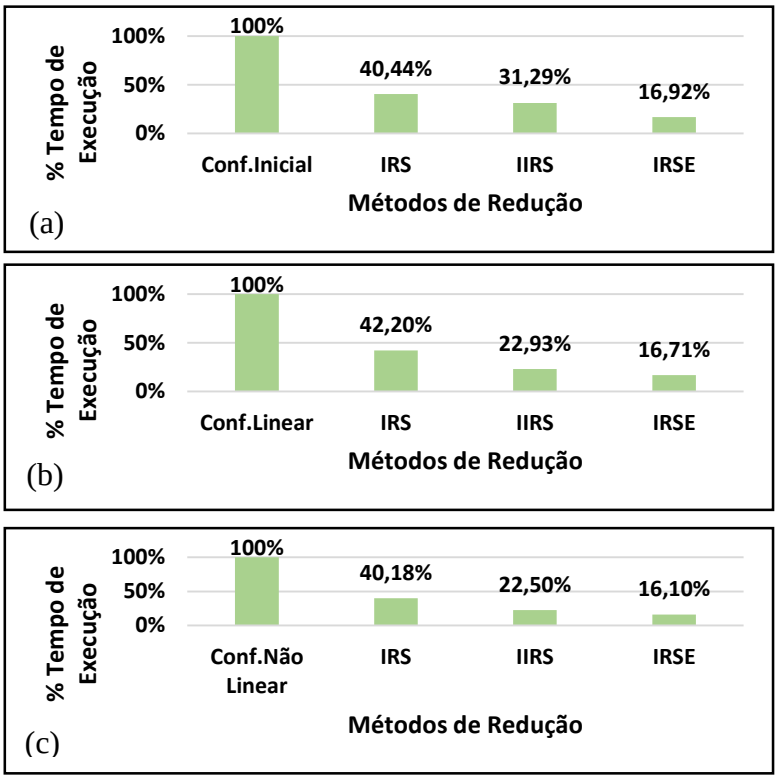


Fonte: O Autor

Com o acoplamento da mola com característica não linear na extremidade da viga, o método IRS, mesmo que de maneira sucinta, ele apresentou uma pequena variação na sua resposta, com relação aos demais métodos que não apresentaram essa variação, apresentando respostas semelhantes as obtidas pelo sistema na configuração não linear.

Na Fig. 4.14, é comparado a porcentagem que cada método de redução gastou para executar as simulações, apresentadas nas Figs. 4.11, 4.12 e 4.13.

Figura 4. 14: Porcentagem do tempo de execução de cada método (a) Configuração Inicial – (b) Configuração Linear – (c) Configuração Não Linear



Fonte: O Autor

De acordo com a Fig. 4.14, quando é comparado o tempo de execução do sistema em cada configuração e o tempo de execução dos métodos IRS, IIRS e IRSE, percebe-se que, em todas as configurações o método IRSE apresentou o menor tempo de execução, ou seja, com maior economia de tempo, chegando à quase 84% de economia de tempo, seguido pelo método IIRS, com aproximadamente 69% e por último, o método IRS, cuja economia foi de quase 58%.

Combinando a melhor eficiência na economia do tempo, com a boa precisão apresentada nas respostas obtidas através do método IRSE, pode-se considerar que o enriquecimento da matriz de transformação sugerida pelo autor, apresentou ótimos resultados, se sobressaindo dos demais métodos apresentados já difundidos na literatura.

4.2. Placa de Reissner-Mindlin

Os métodos IRS, IIRS e IRSE são aplicados para a placa de Reissner-Mindlin, submetida a ação de uma força linear e uma força não linear conforme cada caso apresentado a seguir.

As propriedades da placa e das molas utilizadas, estão descritas na Tabela 4.2.

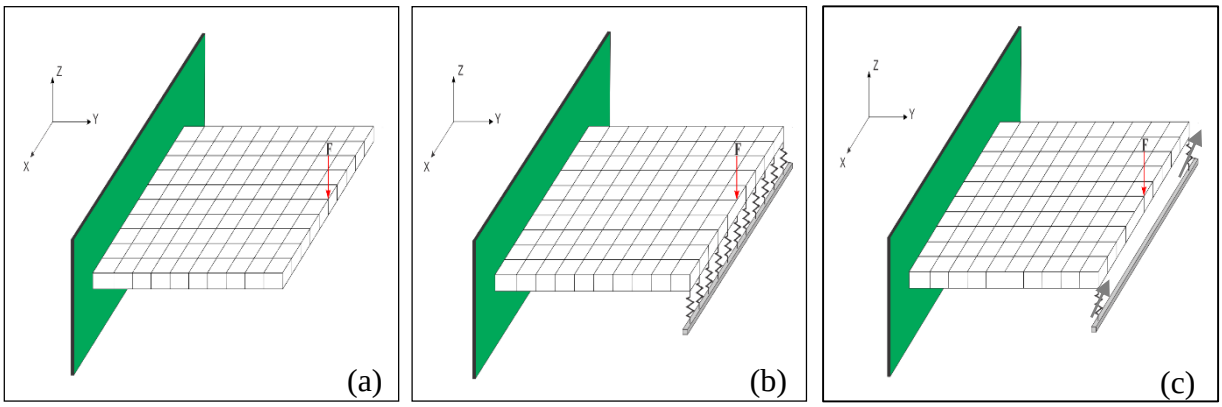
Tabela 4. 2: Forças, propriedades físicas e geométricas da placa

Geométricas	Comprimento (m)	0.5	
	Largura (m)	0.5	
	Espessura (m)	0.005	
	Coeficiente de Correção	5/6	
	Rigidez da Mola Linear	800 N/m	
	Rigidez da Mola Não Linear	10^9 N/m^3	
Físicas	Densidade (Kg/m^3)	2700	
	Modulo de Elasticidade (GPa)	69	
	Coeficiente de Poisson	0.33	
Força	Força Linear	Força Não Linear	Impulso
	$f_{1H}(t) = 20\sin(2\pi\omega t)$	$f_{2H}(t) = 20t\sin(160\pi t^2)$	$f_I(t) = 50$

Fonte: O Autor

Na Fig.4.15, é apresentada as três configurações em que a placa será analisada, (a) placa engastada livre (configuração inicial), (b) placa com molas lineares em toda a extremidade (configuração linear), e (c) placa com molas com características não lineares (configuração não linear).

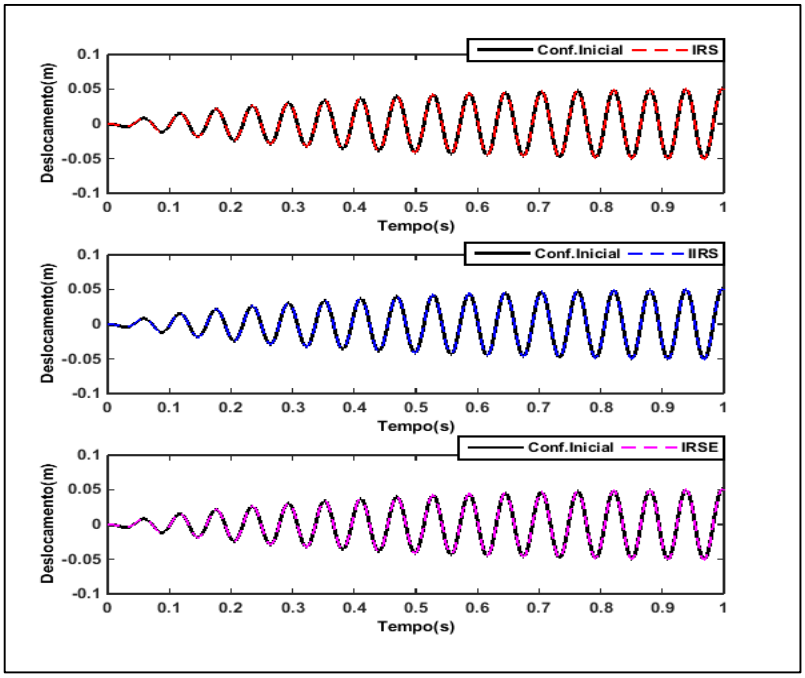
Figura 4. 15: Placa de Reissner-Mindlin sujeito a ação de uma força linear. (a) configuração inicial - (b) configuração linear- (c) configuração não linear



Fonte: O Autor

A comparação entre a resposta obtida para configuração inicial da placa com a aplicação dos métodos de redução, é apresentada na Fig. 4.16

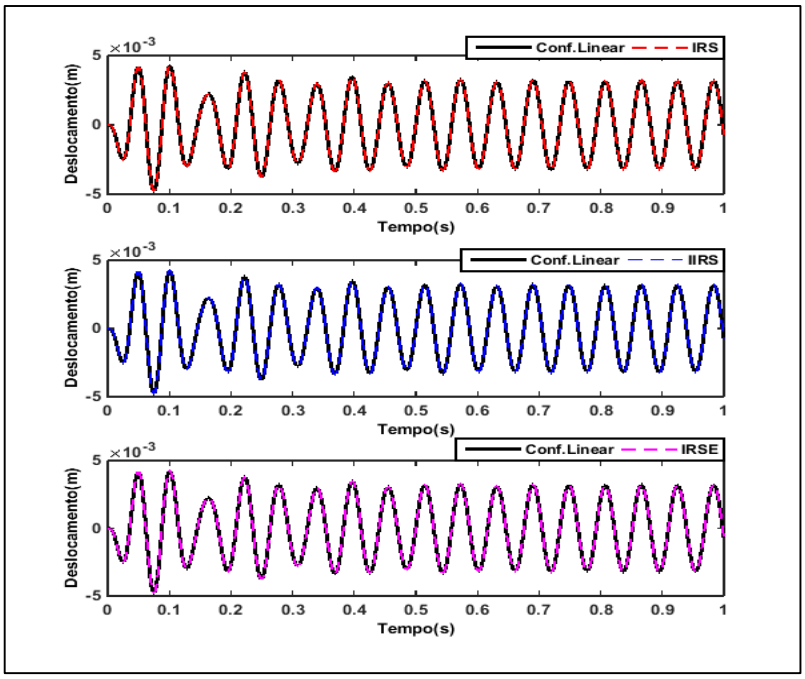
Figura 4. 16: Métodos de Redução - Força Linear - Conf. Inicial



Fonte: O Autor

Na Fig. 4.17, é apresentada as respostas obtida por cada método de redução para a placa na configuração linear, ou seja, com o acoplamento de molas lineares.

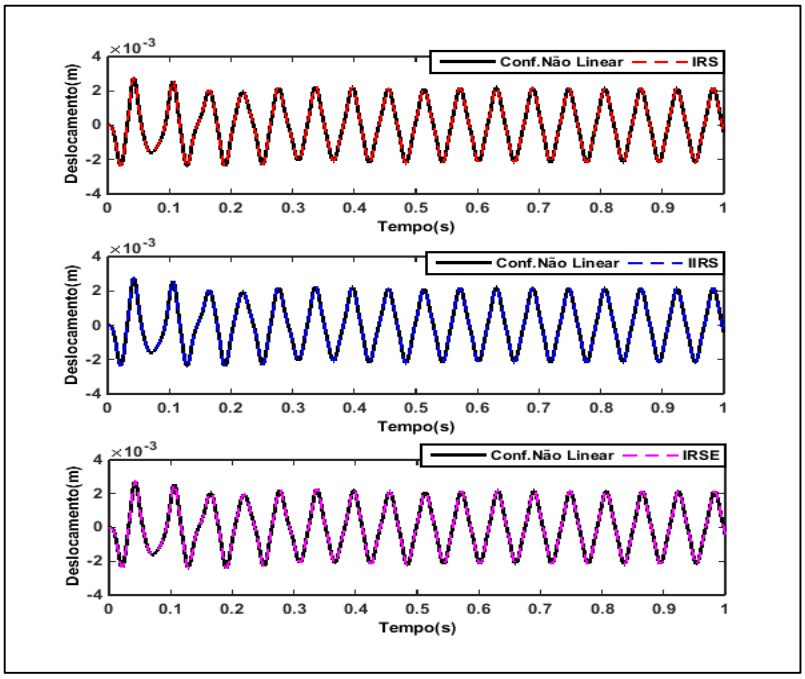
Figura 4. 17: Métodos de Redução - Força Linear - Conf.Linear



Fonte: O Autor

Para a Fig. 4.18, os resultados são referentes ao sistema na configuração com molas não lineares.

Figura 4. 18: Métodos de Redução - Força Linear - Conf.Não Linear

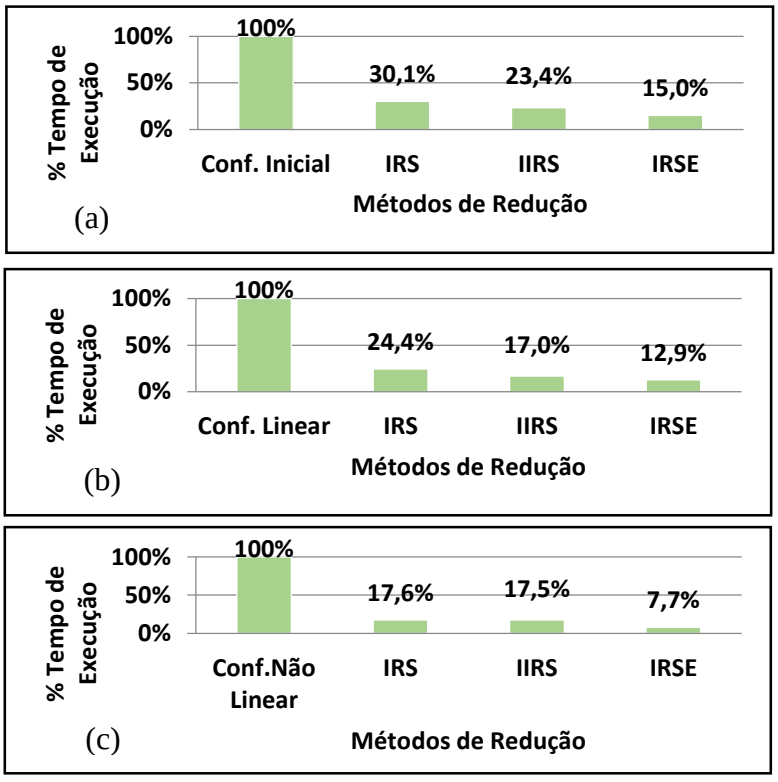


Fonte: O Autor

De acordo com as Figs. 4.16, 4.17 e 4.18, representando as respostas obtidas para cada método IRS, IIRS e IRSE, sob as diferentes configurações, sendo que todos os métodos apresentaram bons resultados, ou seja, suas respostas foram muito próximas das respostas obtidas para a placa sem a utilização de algum método de redução.

Na Fig. 4.19, é comparado a porcentagem que cada método de redução gastou para executar as simulações apresentadas nas Figs. 4.16, 4.17 e 4.18, quando comparadas com cada configuração do sistema.

Figura 4. 19: Porcentagem do tempo de execução de cada método (a) Configuração Inicial – (b) Configuração Linear – (c) Configuração Não Linear



Fonte: O Autor

Na parte de economia de tempo, assim como as simulações apresentadas para a viga de Euler-Bernoulli, o método IRS foi o que apresentou a menor economia, variando de aproximadamente 70% à quase 83% do tempo do sistema na configuração de referência.

A variação da economia de tempo para o método IIRS foi de quase 77% à 83%, no qual para a configuração utilizando molas não lineares, essa economia foi muito próxima da obtida pelo método IRS.

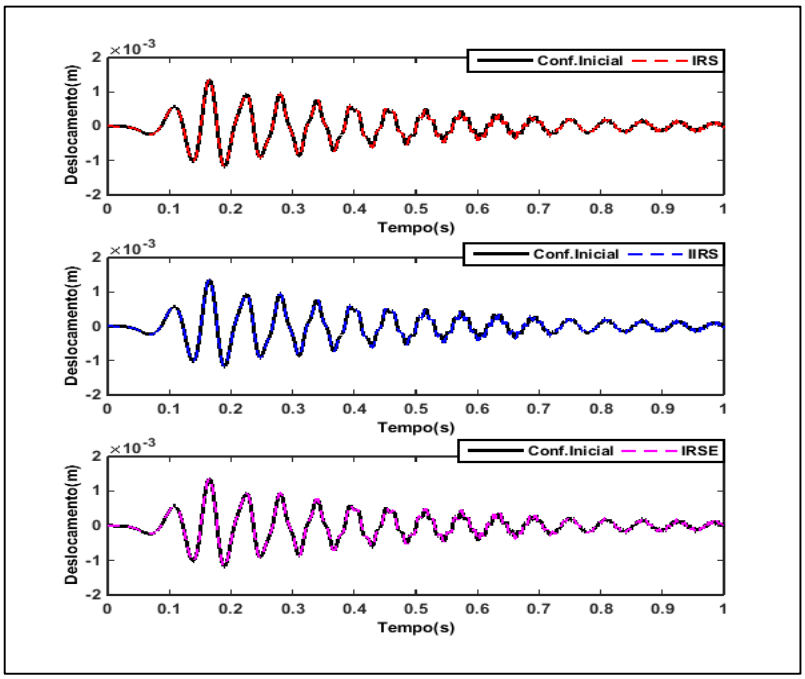
Já o IRSE, produziu excelentes resultados, apresentando as menores porcentagem de tempo de execução, e sua economia de tempo variou entre 85% à quase 92%.

A placa agora, é submetida a ação de uma força não linear, conforme apresentada na Tabela 4.2.

As mesmas configuração são mantidas, ou seja, a configuração inicial representa a placa engastada-livre, sujeita a ação da força não linear. Na configuração linear, leva-se em conta a configuração inicial, com o acoplamento de molas lineares, conforme disposição da Fig. 4.15(b). Já a configuração não linear, representa a configuração inicial, como acoplamento de molas não lineares, conforme apresentado na Fig. 4.15(c).

Na Fig. 4.20 a resposta para configuração inicial da placa sujeito a ação da força não linear é apresentada na Tabela 4.2.

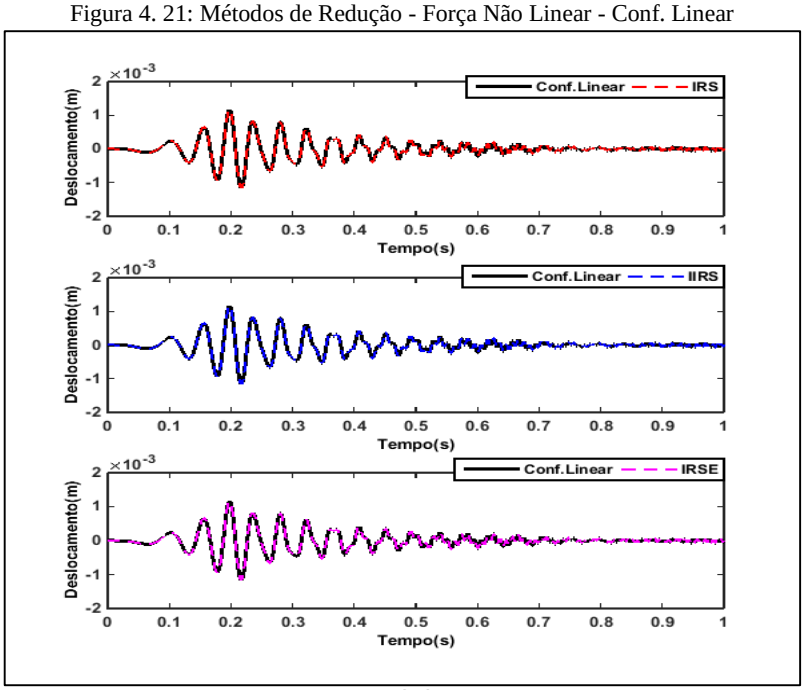
Figura 4. 20: Métodos de Redução - Força Não Linear – Configuração Inicial



Fonte: O Autor

Agora, considera-se a configuração linear da placa, ou seja, com o acoplamento de molas lineares por toda a extremidade da placa. As respostas para esse sistema é exposta na Fig. 4.21.

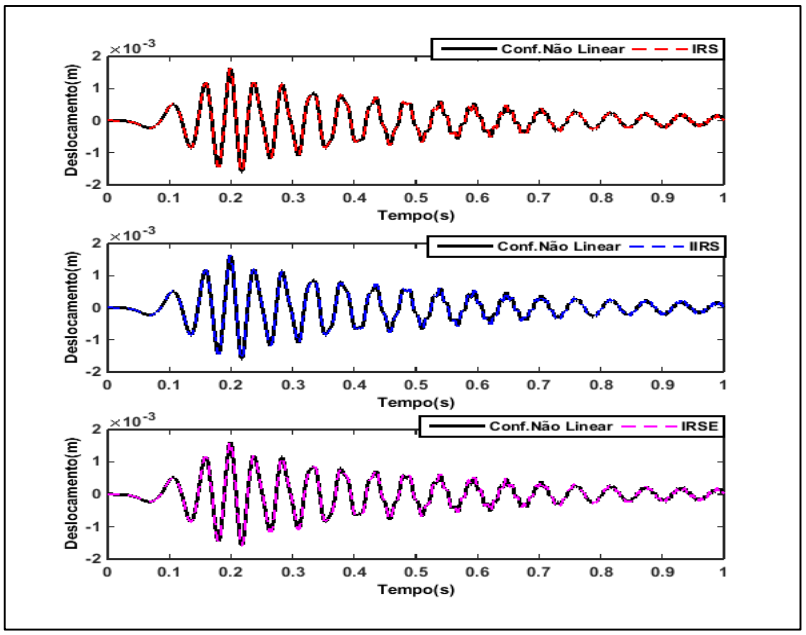
Figura 4. 21: Métodos de Redução - Força Não Linear - Conf. Linear



Fonte: O Autor

Em seguida, considera-se a configuração não linear da placa, com o acoplamento de molas não lineares na extremidade da placa. As respostas para esse sistema é exposta na Fig. 4.22.

Figura 4. 22: Métodos de Redução - Força Não Linear - Conf. Não Linear



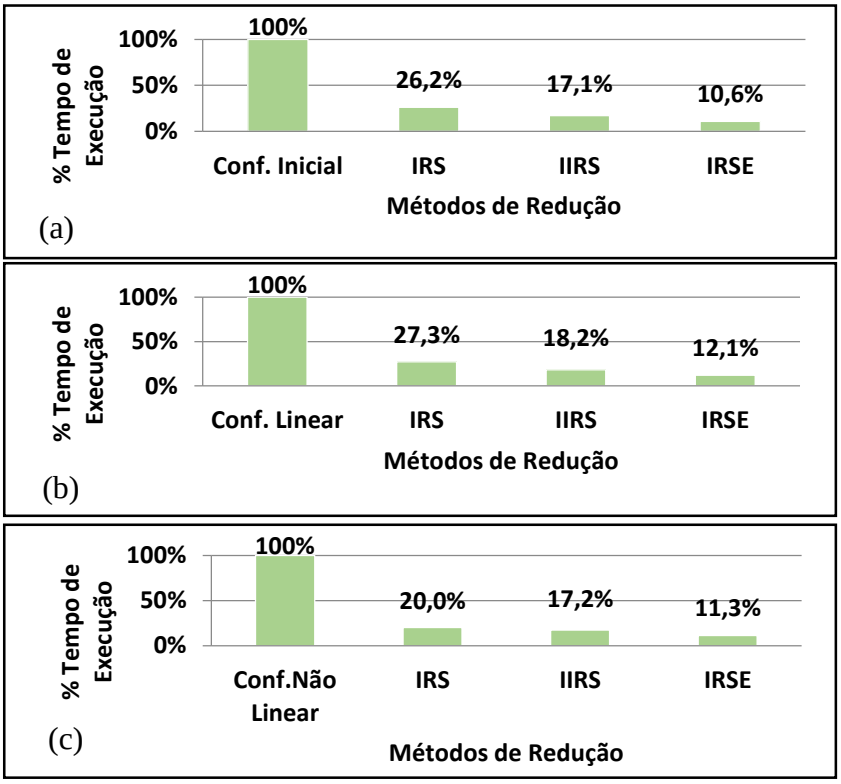
Fonte: O Autor

Mesmo com a resposta não linear do sistema, os métodos de redução apresentaram uma boa qualidade nas respostas com o sistema sem a utilização dos métodos de redução, como exposto pelas Figs.4.20, 4.21 e 4.22.

Com esse objetivo alcançado, para as três configurações da placa, deve-se então comparar a porcentagem do tempo de execução de cada método.

Na Fig. 4.23, são apresentados a porcentagem do tempo de execução de cada método.

Figura 4. 23: Porcentagem do tempo de execução de cada método (a) Conf.Inicial – (b) Conf.Linear – (c) Conf.Não Linear



Fonte: O Autor

De acordo com a Fig. 23, o método IRS, apresentou a maior porcentagem de tempo de execução, contudo a sua economia de tempo é menor que os métodos IIRS e IRSE, variando de aproximadamente 72% à 80% do tempo da configuração do sistema.

O IIRS já apresentou resultados melhores que o método IIRS, com uma economia de tempo de aproximadamente 83%.

O melhor resultado foi apresentado pelo método IRSE, onde essa economia de tempo chegou à quase 90% do tempo, isso para a configuração inicial (Fig. 4.23(a)), e nas demais configurações, essa economia girou em torno de 88% (configuração linear (Fig. 4.23(b)) e 89% (configuração não linear (Fig.4.23(c)).

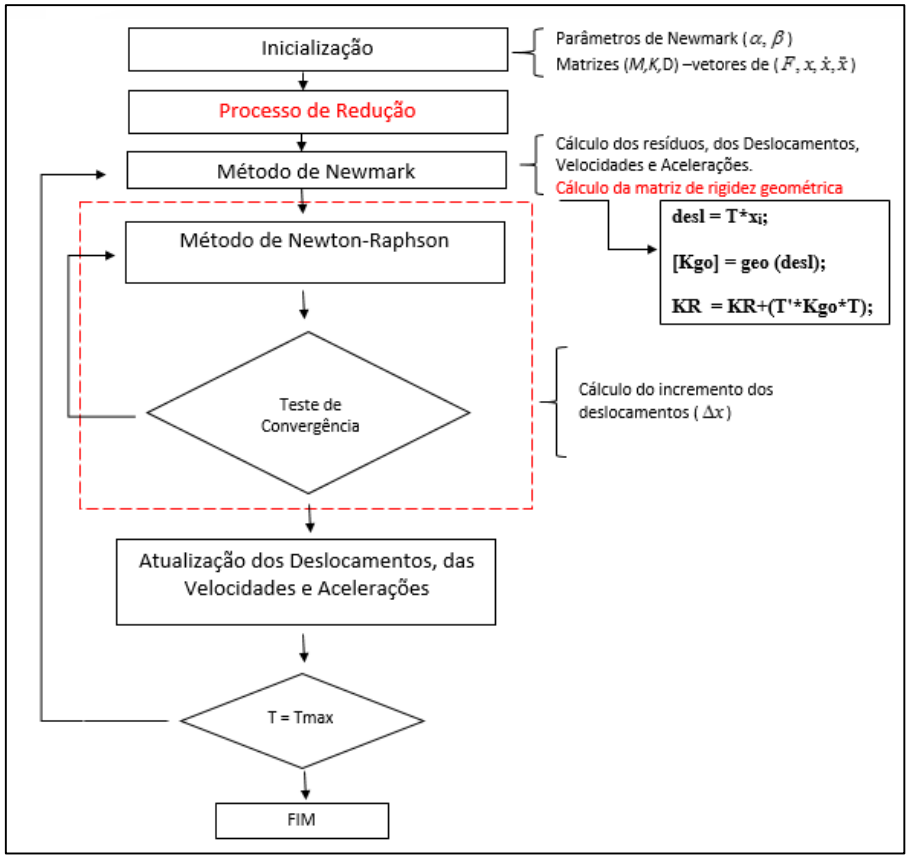
4.3. Viga com Não Linearidade Geométrica

Os bons resultados apresentados nas seções 4.1 e 4.2, demostraram que para sistemas lineares e com não linearidade localizada, os métodos IRS, IIRS e IRSE podem desempenhar um papel importante para a obtenção de resultados precisos em um intervalo de tempo de execução menor. Agora, os métodos de redução são aplicados a viga com não linearidade geométrica.

A principal diferença entre essa aplicação e as demais nas seções anteriores, é que a não linearidade geométrica faz com que a matriz de rigidez seja atualizada a cada passo de tempo, desse modo, torna-se mais difícil à aplicação dos métodos de redução para esse tipo de problema.

As simulações apresentadas a seguir, foram executas em ambiente Matlab®, utilizando o método de Newmark combinado com Newton Rapshon (GAVIN, 2014; RAO, 2008; CHOPRA, 1995), como descrito no Algoritmo 4.2, com passo de tempo de $\Delta t = 0.0001$, os parâmetros α e β de Newmark com valores de 0.5 e 0.25 respectivamente. As configuração da máquina utilizada para a execução das simulações foram: Notebook Dell com processador Intel Core i7, HD de 1 Tera e memória Ram de 8Gb, com placa de vídeo dedicada AMD Reodon M265 de 2GB.

Algoritmo 4. 2: Método de Newmark com Newton Raphson utilizando métodos de redução em sistema com não linearidade geométrica



Fonte: O Autor

Os dados utilizados para as simulações, são apresentados na Tabela 4.3.

Tabela 4. 3: Forças, propriedades físicas e geométricas da viga

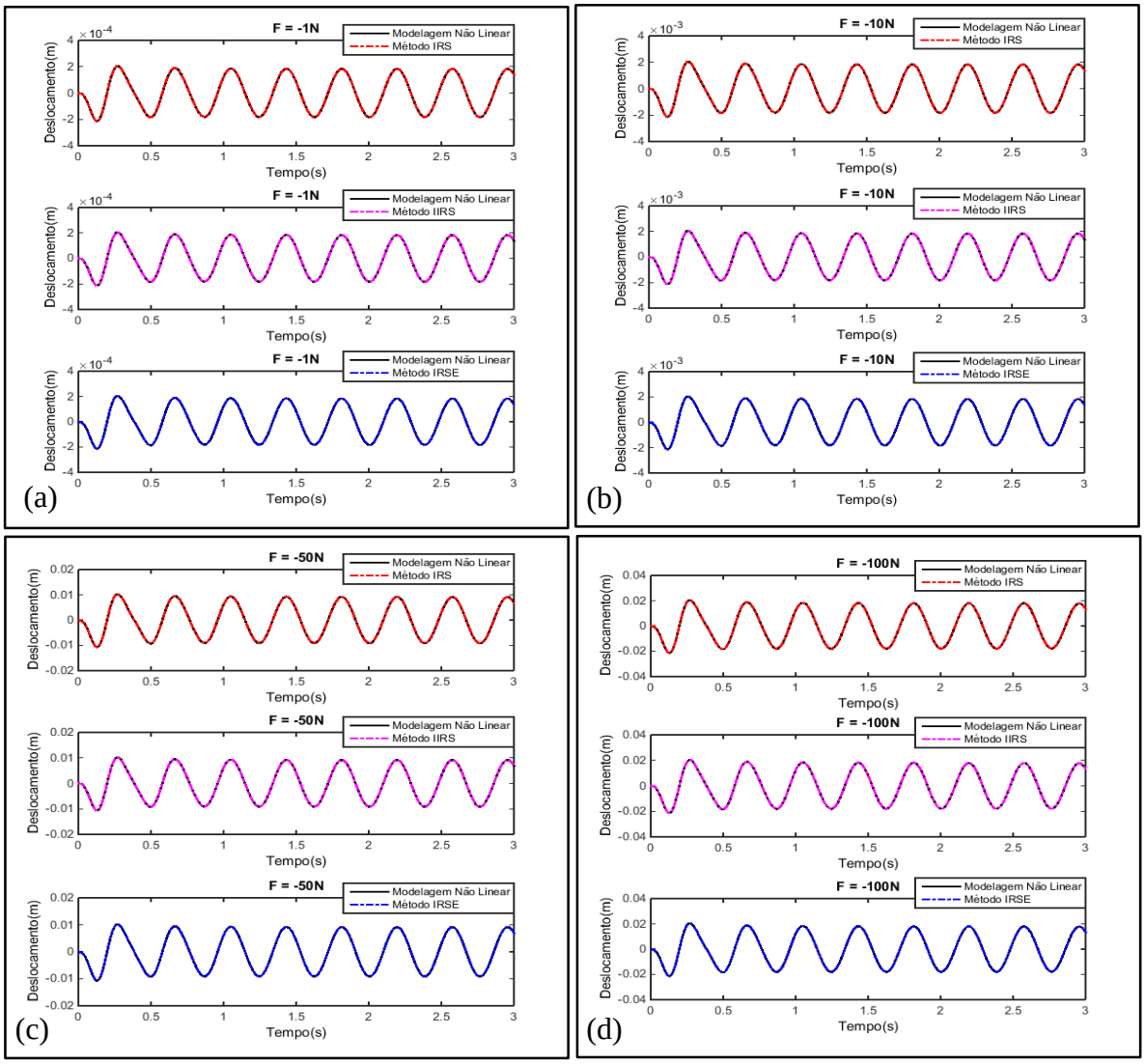
Propriedades	Geometria	Comprimento (m)	2.5	
		Largura (m)	0.1	
		Espessura (m)	0.04	
	Físicas		Alumínio	Acrílico
		Densidade (Kg/m^3)	2700	1130
		Modulo de Elasticidade (GPa)	69	3.24
Forças		Força Linear		
		$f(t) = F\sin(\pi\omega t)$	$F = \begin{cases} 1N \\ 10N \\ 50N \\ 100N \end{cases}$	

Fonte: O Autor

Pode-se notar, que antes do cálculo da matriz de rigidez geométrica, o vetor reduzido de deslocamento retorna ao seu tamanho original, assim, o cálculo dessa matriz é feito com base nos deslocamentos globais, e não nos deslocamentos reduzidos.

Primeiramente, os métodos IRS, IIRS e IRSE são aplicados a modelagem não linear para o Alumínio, conforme apresentada na Fig. 4.24.

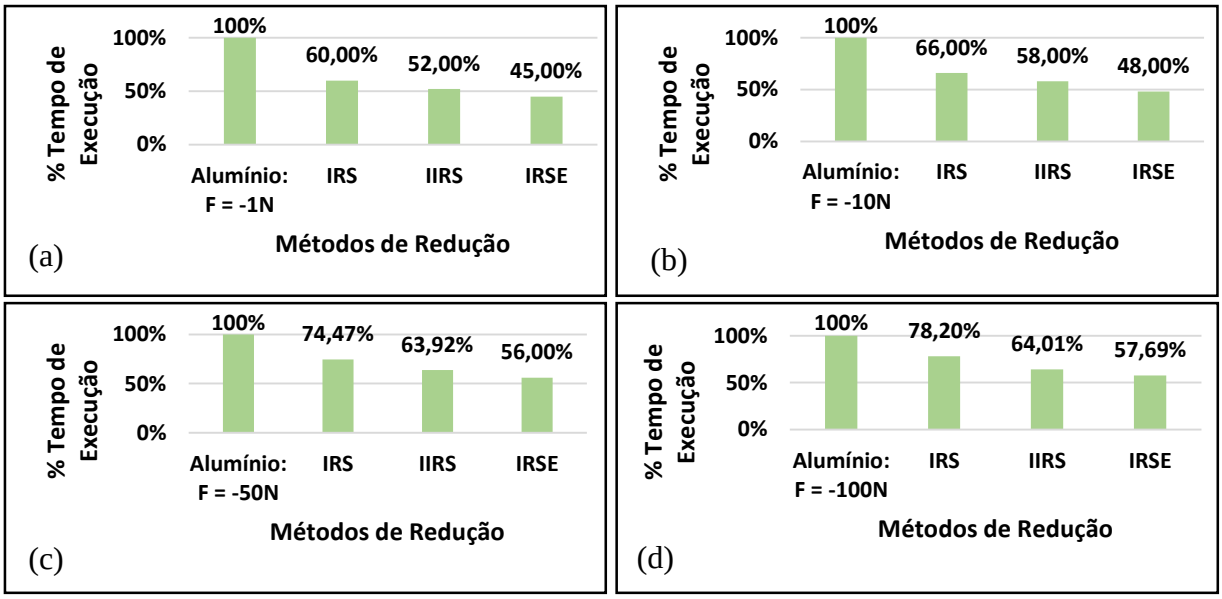
Figura 4. 24: Métodos IRS, IIRS e IRSE aplicados a viga de Alumínio com não linearidade geométrica – (a) F=1N (b) F=10N (c) F=50N (d) F=100N



Fonte: O Autor

Na Fig. 4.25 os resultados são referentes a porcentagem do tempo de execução de cada método de redução, quando comparado ao tempo do sistema inicial da viga, aplicada as diferentes amplitudes de força.

Figura 4. 25: Métodos IRS, IIRS e IRSE aplicados a viga de Acrílico com não linearidade geométrica – (a) F=-1N¬ - (b) F=-10N – (c) F=-50N – (d) F=-100N



Fonte: O Autor

Como foi apresentado nas seções 4.1 e 4.2 os métodos IRS, IIRS e IRSE apresentaram bons resultados, tanto quando observa-se a curva resposta do sistema reduzido quando a tanto para quando se observa a curva do sistema original, além de uma economia de tempo, superior a 59% para o IRS, 67 para o IIRS e 87% para o IRSE, dependendo da simulação.

A modelagem não linear, devido a grandes deslocamentos, não teve grande influência para a viga de alumínio, conforme evidenciado no capítulo 3, na seção 3.2, dessa maneira, à de se esperar, que se obtenha bons resultados através dos métodos de redução, pois como visto na seção 4.1 e 4.2, para sistemas lineares e para sistemas com não linearidade localizada, ambos os métodos apresentaram tanto uma boa aproximação da curva resposta, quanto uma economia de tempo considerável.

Sendo assim, conforme representa a Fig. 4.24 (a), (b), (c) e (d), no qual a viga é submetida a uma força harmônica com diferentes amplitudes, os métodos IRS, IIRS e IRSE apresentam

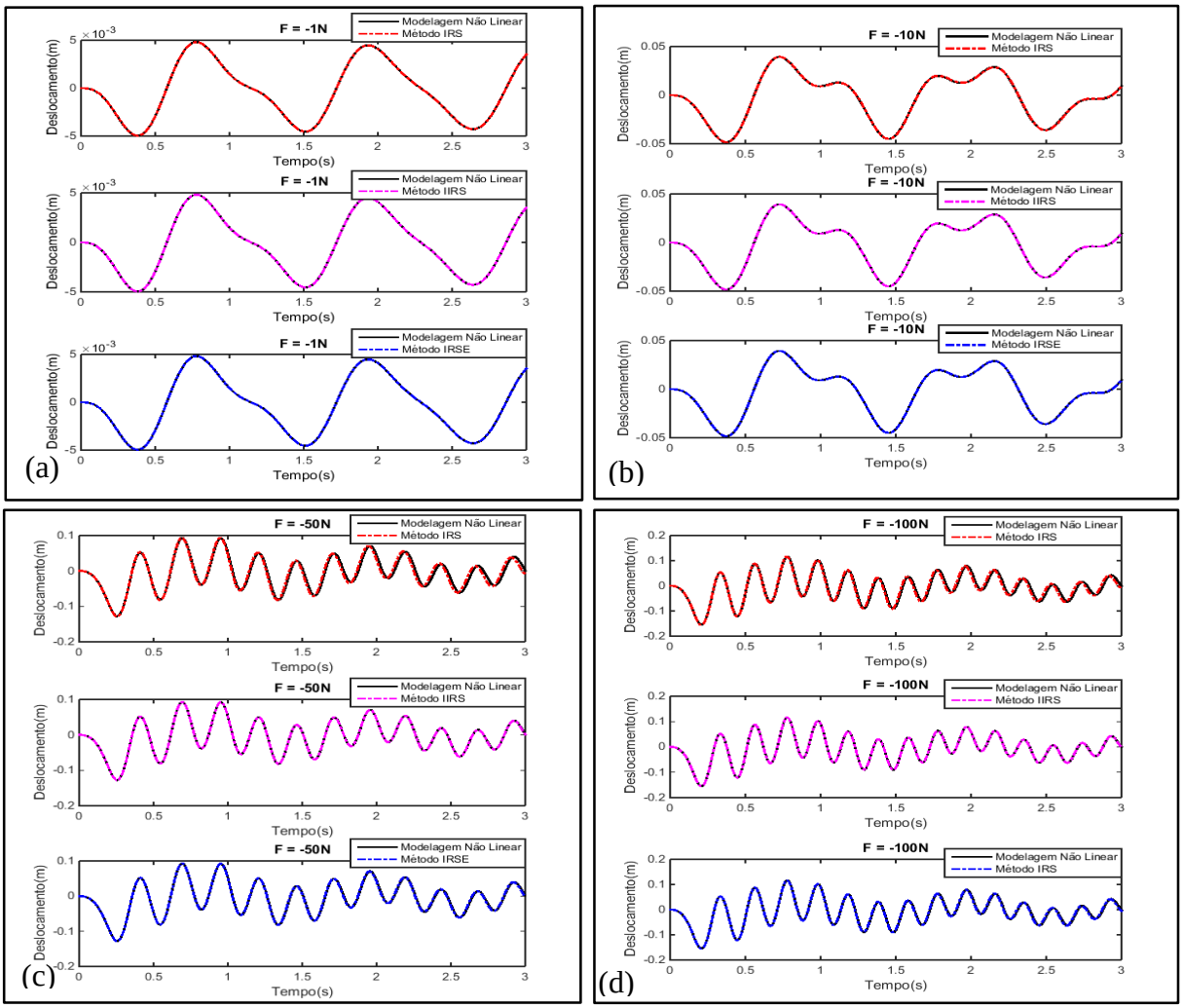
bons resultados quanto a aproximação da curva resposta, sendo em ambos os casos, próximas do sistema original.

A economia de tempo apresentada por esses métodos, se reduz a medida que a amplitude da força é aumentada, conforme apresenta a Fig. 4.25.

Sendo que o método IRS, apresentou uma economia de tempo variando entre 22% à quase 40%. Já o método IIRS apresentou melhores economias de tempo, variando entre 36% à quase 48%. A melhor economia de tempo apresentada, foi através do método IRSE, variando de 42% à pouco mais de 55%.

Agora, os método IRS, IIRS e IRSE são aplicados a viga de Acrílico, submetida a força harmônica linear, variando as amplitudes da mesma.

Figura 4. 26: Métodos IRS, IIRS e IRSE aplicados a viga de Acrílico com não linearidade geométrica – (a) F=1N (b) F=10N (c) F=50N (d) F=100N



Fonte: O Autor

No capítulo 3, na seção 3.2.1, foi evidenciada a importância da modelagem não linear sobre a modelagem linear, principalmente para a viga de Acrílico.

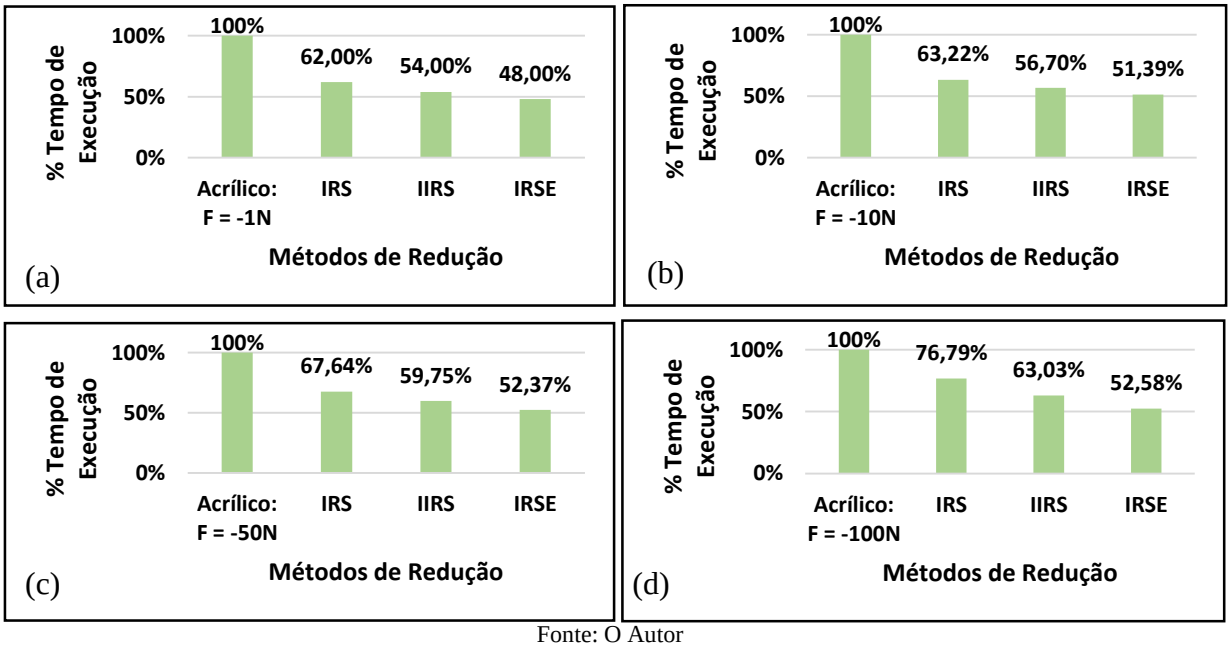
Nesse sentido, a modelagem não linear devido a grandes deslocamentos, a matriz de rigidez devido a não linearidade geométrica deve ser atualizada a cada passo de tempo, fazendo com que o tempo para executar cada simulação seja muito maior do que quando se considera a modelagem linear.

Nos resultados apresentados na Fig. 4.26 a técnica utilizada para se obter bons resultados tanto em relação a qualidade das respostas como na economia de tempo, utiliza o vetor dos deslocamentos completos para efetuar o cálculo da matriz de rigidez devido a não linearidade, de forma que a essa matriz de rigidez é montada para o sistema global a cada passo de tempo e logo em seguida, ela é reduzida e somada a matriz de rigidez reduzida da viga.

Dessa maneira, tanto para a viga de Alumínio quanto para a viga de Acrílico, as respostas obtidas através dos métodos de redução, foram precisas quando comparadas com as respostas dos sistemas sem o uso dos métodos de redução.

Na Fig. 4.27 os resultados são referentes a porcentagem do tempo de execução de cada método de redução, quando comparado ao tempo do sistema inicial da viga, aplicada as diferentes amplitudes de força.

Figura 4. 27: Porcentagem do tempo de execução para a viga de Acrílico- (a) F=1N (b) F=10N (c) F=50N (d) F=100N



Fonte: O Autor

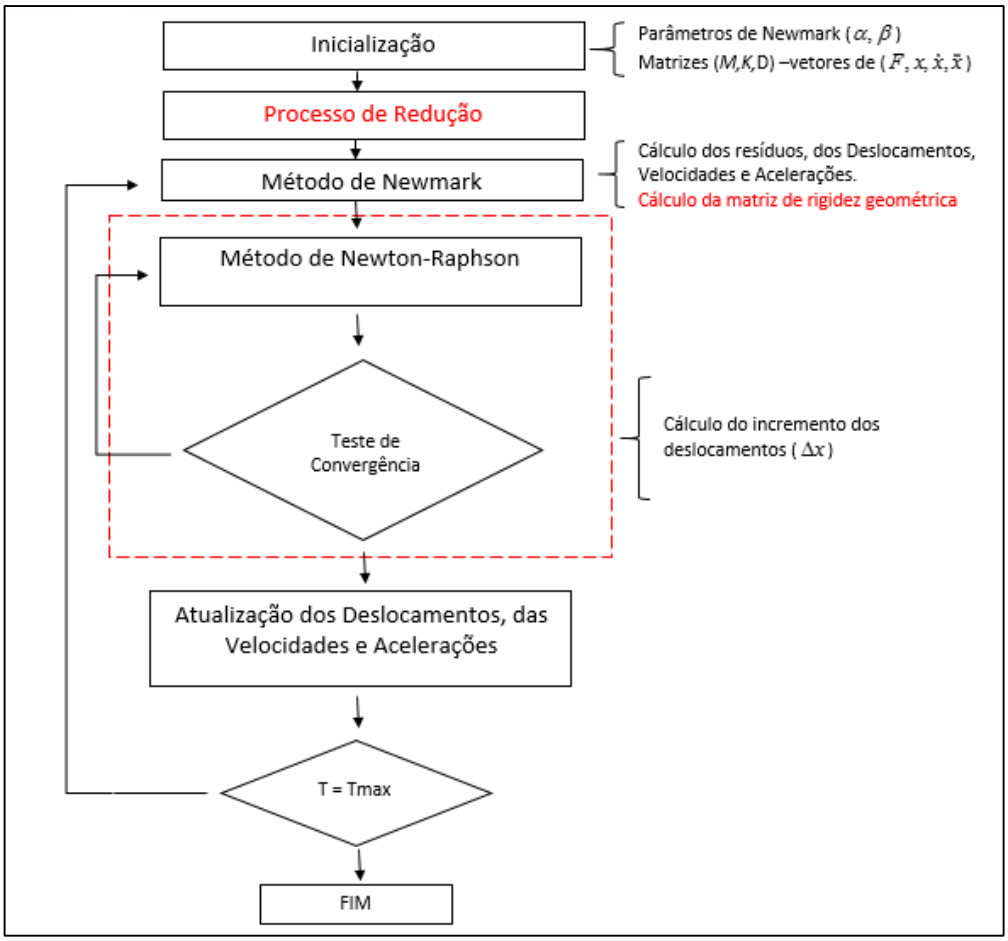
Embora os cálculos da matriz de rigidez geométrica esteja sendo calculada com relação aos deslocamentos globais, os métodos de redução IRS, IIRS e IRSE apresentaram uma boa economia de tempo, conforme apresentado na Fig. 4.27.

Assim como nas demais simulações, o método IRS obteve a menor economia de tempo, variando de 23,21% à 38%. O método IIRS apresentou uma economia de 36,47% à 42%, dependendo da amplitude da força aplicada no sistema.

Já o método proposto nessa dissertação, o IRSE, apresentou uma economia de 47,42% à 52%, ou seja, o método além de proporcionar uma boa qualidade nas respostas, também apresentou uma grande economia de tempo.

O Algoritmo 4.3 representa a utilização do método de Newmark com Newton Raphson no qual a matriz de rigidez geométrica é calculada levando em conta os deslocamentos reduzidos.

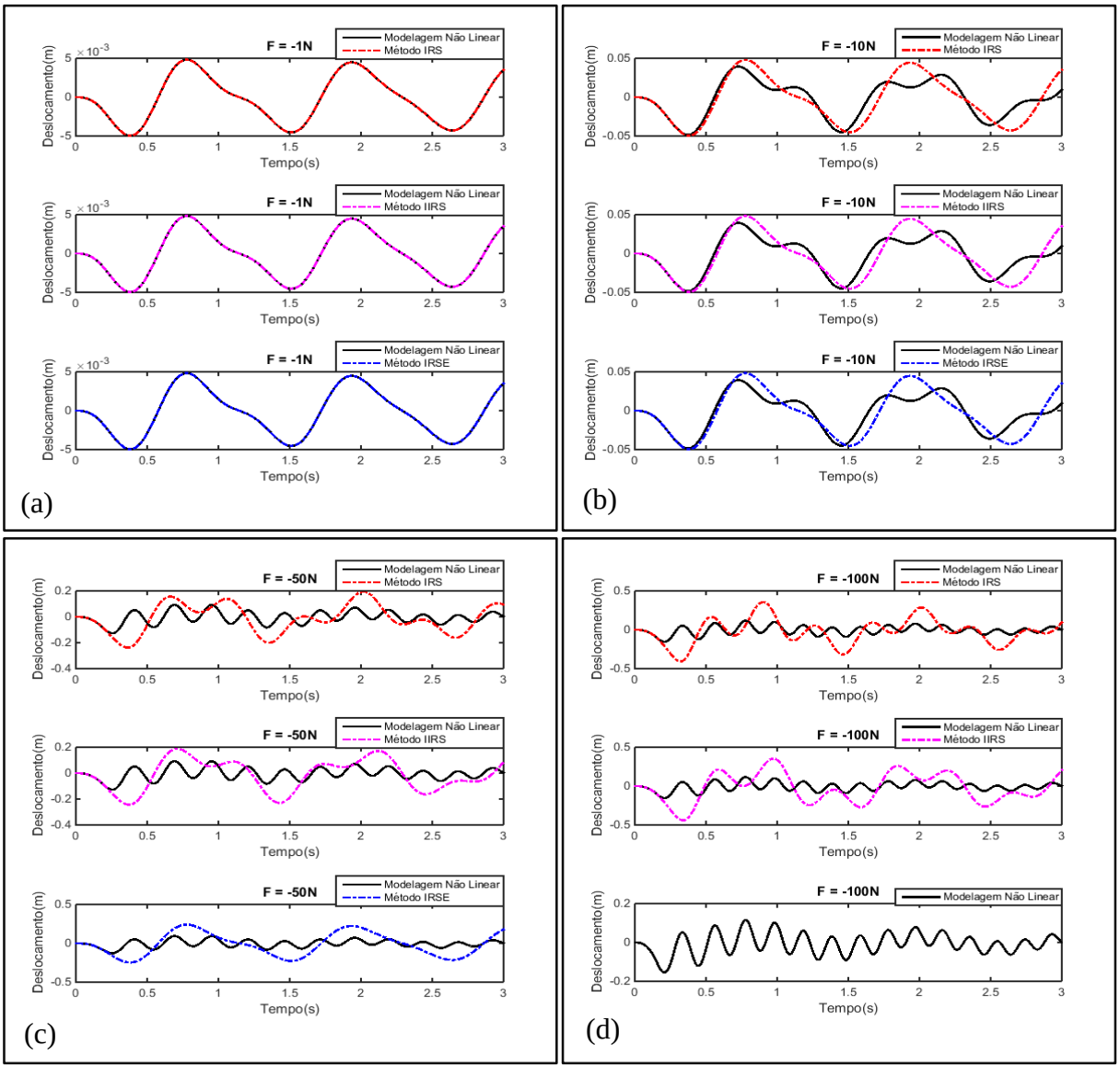
Algoritmo 4. 3: Método de Newmark com Newton Raphson utilizando redução de modelos em sistema com não linearidade geométrica



Fonte: O Autor

Na Figura 4.28, apresenta os resultados do sistema levando em consideração o Algoritmo 4.3, em que as matrizes estão em sua forma reduzida, ou seja, o cálculo da matriz de rigidez devido a não linearidade geométrica também é calculada com base nos deslocamentos reduzidos.

Figura 4. 28: Métodos IRS, IIRS e IRSE aplicados a viga de Acrílico com não linearidade geométrica, cuja o cálculo da matriz de rigidez devido a não linearidade leva em conta os deslocamentos reduzidos (a) F=1N (b) F=10N (c) F=50N (d) F=100N



Fonte: O Autor

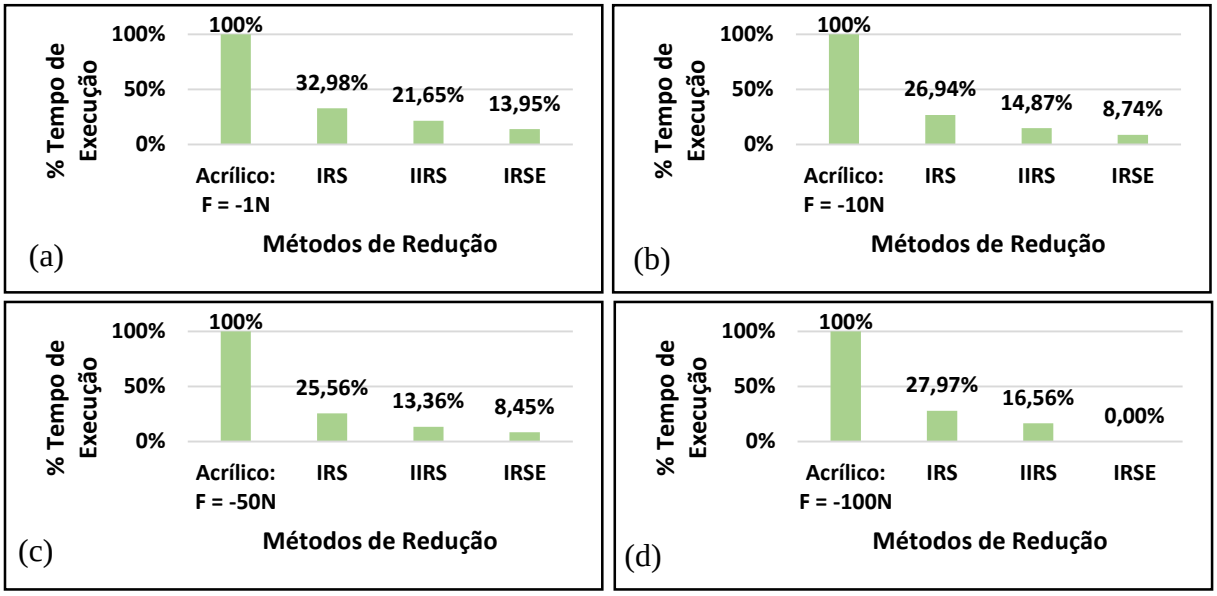
De acordo com a Figura 4.28 nenhum método de redução apresentou bons resultados para a viga com não linearidade geométrica. De fato, na Figura 4.28(a), os métodos apresentam

bons resultados devido, porém a força utilizada na estrutura foi de 1N, ou seja, a resposta apresentada para a viga com não linearidade geométrica é a mesma resposta apresentada pela viga sem a não linearidade geométrica, pois para pequenas amplitudes de força, o efeito da modelagem não linear pode ser desprezada.

A medida em que a amplitude da força aumenta, mais importante se torna a modelagem não linear, e como apresentado na Figura 4.28(b), (c) e (d), nenhum método apresentou bons resultados.

Na Figura 4.29, é apresentado a porcentagem do tempo de execução de cada método de redução referente as simulações apresentadas na Figura 4.28.

Figura 4. 29: Porcentagem do tempo de execução para a viga de Acrílico levando em conta que a matriz de rigidez devido a não linearidade geométrica é calculada com os deslocamentos reduzidos- (a) F=1N (b) F=10N (c) F=50N (d) F=100N



Fonte: O Autor

Na economia de tempo, todos os métodos apresentaram ótimos resultados, visto que de acordo com a Figura 4.29, a economia de tempo foi superior à 67% para o IRS, 78% para o IIRS e 86% para o método IIRS.

Nota-se que o método IRSE para o caso da força de 100N, não proporcionou nenhuma resposta (Figura 4.28(d)), pois o mesmo não convergiu, atingindo a quantidade de iterações máxima dentro do método de Newmark combinado com Newton Raphson.

Com os resultados apresentados na Figura 4.28, a utilização do vetor de deslocamentos reduzidos para o cálculo da matriz de rigidez devido a não linearidade não apresenta resultados eficientes, deve-se calcular essa matriz, levando em conta os deslocamentos globais do sistema.

A principal desvantagem da técnica em que se utiliza o vetor de deslocamento do tamanho global é que uma porcentagem da economia de tempo (em torno de 30% a 40%) é sacrificada. Esse sacrifício na economia de tempo é feito para que o cálculo da matriz de rigidez devido a não linearidade geométrica seja calculada, de forma que os métodos IRS, IIRS e IRSE apresentem respostas precisas, conforme apresentado na Fig.4.26 (a), (b), (c) e (d), sendo que em todos os casos, para as diferentes amplitudes de força aplicadas, todos os métodos apresentaram a curva resposta muito próximas das encontradas pelo sistema original sem redução.

Mesmo sacrificando de 30% à 40% da economia de tempo, os resultados apresentados na Fig. 4.27 (a), (b), (c) e (d), demostra que todos os métodos apresentaram uma economia de tempo satisfatória, diminuindo a medida em que a amplitude da força é aumentada.

Na literatura, muitos autores reforçam as vantagens da aplicação de métodos de redução em sistemas lineares, e a partir dos resultados apresentados nesse capítulo, as vantagens se estende também para os sistemas com não linearidade localizada e sistemas com não linearidade geométrica.

CONCLUSÃO

A modelagem de sistemas mecânicos envolvendo elementos de viga e placa, tem grande contribuição para modelagem de sistemas mais complexos, como rotores, estruturas automobilísticas, telhados entre outras.

A modelagem através do método dos elementos finitos, possibilita a expansão no leque de estruturas a ser modelada, visto que a resposta por meios analíticos não é possível em muitos casos.

Na nova conjuntura da modelagem de sistemas não lineares, iniciou-se este estudo apresentando a modelagem de uma viga de Euler-Bernoulli e uma placa de Reissner-Mindlin com não linearidade localizadas, utilizando elementos de molas com características não lineares.

Em todas as simulações, a aplicação da mola com característica não linear apresentou melhores resultados do que a aplicação de molas lineares, para a atenuação de vibração do sistema.

Outro tipo de não linearidade foi estudada, a não linearidade geométrica, utilizando dois tipos de materiais, o alumínio e o acrílico, demostrando que para o material menos rígido (acrílico), mesmo sob a ação de forças com menores amplitudes, a modelagem não linear tem grande influência na resposta. Já para o caso do alumínio, sob forças com amplitudes menores, a modelagem não linear não apresentou divergência com a modelagem linear.

A medida que a amplitude da força crescia, mais a modelagem não linear influenciava na resposta.

O tempo de execução das simulações é um aspecto importante de qualquer projeto, nesse sentido, foi estudado dois métodos de redução, o IRS e o IIRS. Para melhora a economia de tempo e manter uma boa qualidade nas respostas, foi proposto o método de redução o IRSE, no qual a matriz de transformação do método IRS é modificada, enriquecendo-a com alguns autovetores selecionados, sendo esta a principal contribuição desta dissertação, em que tanto para sistemas lineares e não lineares, o método IRSE apresentou a melhor economia de tempo dentre os métodos estudados.

A aplicação dos métodos IIRS e IRSE, apresentaram em todos os casos, uma boa aproximação com o sistema inicial, se sobressaindo o método IRSE, com uma economia de tempo de superior à 87%, dependendo da simulação.

Já o método IRS, em alguns casos, não obteve uma boa aproximação com o sistema inicial, porém a economia de tempo, é consideravelmente razoável, superior à 59%, dependendo da simulação.

Com a utilização dos métodos IRS, IIRS e IRSE para sistemas com não linearidade geométrica, bons resultados foram alcançados, tanto em aproximação da resposta quanto para a economia de tempo, mesmo a matriz de rigidez devido a não linearidade geométrica sendo calculada em relação aos deslocamentos globais e não em relação aos deslocamentos reduzidos (quando não obteve resultados eficientes).

Os resultados apresentados em todo o texto, foram apresentados em diferentes congressos, nos quais destacam-se os seguintes artigos:

Model Reductions Methods Applied of Nonlinear Mechanical Systems - 23rd ABCM International Congress of Mechanical Engineering – COBEM 2015 dos autores: Fonseca Júnior, L. A; Gonçalves, D. F; de Lima, A. M. G; Borges, R. A

Study and Comparison of Reduction Methods of Mechanical Systems - 23rd ABCM International Congress of Mechanical Engineering – COBEM 2015, dos autores: D. F. Gonçalves, L. A. Fonseca Jr., R. A., Borges, A. M. G. de Lima.

Reduction Model Methods Applied of Mechanical Nonlinear System - XXXVI Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, CILAMCE 2015, dos autores: D. F. Gonçalves, L. A. Fonseca Jr., S. M. F. de Rezende, R. A. Borges, A. M. G. de Lima.

Métodos de Redução de Modelos, Aplicados a Sistemas com Não Linearidade Localizada - Congresso Nacional de Matemática Aplicada à Industria (CNMAI), Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional (ERMAC) e Semana de Matemática Industrial (SeMI), dos autores Fonseca Júnior, L. A; Gonçalves, D. F; Borges, R. A; de Lima, A. M. G.

Técnicas de Redução de Modelos Aplicadas à Análise de Estruturas Mecânicas - Congresso Nacional de Matemática Aplicada à Industria (CNMAI), Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional (ERMAC) e Semana de Matemática Industrial (SeMI), dos autores: D. F. Gonçalves, L. A. Fonseca Jr., R. A., Borges, A. M. G. de Lima

Além dos artigos publicados em congressos nacionais e internacionais, dois artigos estão em fase final de preparação, para ser submetidos a duas revistas internacionais, com conceito A1 e A2.

Para trabalhos futuros, pretende-se estudar a aplicação dos métodos de redução em estruturas mais complexas, com aplicação em aeronáutica, (placas sujeita a grandes deslocamentos, painéis, cascas, entre outros).

CITAÇÕES E REFERÊNCIAS

AGLIETTI, G. S.; REDI, S.; WALKER, S. J. I. KILEY, A. Robustness of the Orthogonality Checks on a Satellite FEM using a SEREP Test Analysis Model. In - PROCEEDINGS OF THE 24TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON NOISE AND VIBRATION ENGINEERING AND 3RD INTERNATIONAL CONFERENCE ON UNCERTAINTY IN STRUCTURAL DYNAMICS, 2010

AGLIETTI, G. S.; WALKER, S. J. I.; KILEY, A. *On the use of SEREP for Satellite FEM Validation*. *Engineering Computations*, v.6, n.29, p. 580-595, 2012

AL-BENDER, F.; SYMENS, W.; SWEVERS, J.; VAN BRUSSEL, H. Theoretical Analysis of the Dynamic Behavior of Hysteresis Elements in Mmechanical Systems, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, v.39, n.1, p. 1721–1735, 2004.

ALVARENGA, A. R. de. *Aspectos Importantes na Análise Avançada com Zona Plástica de Portais Planos de Aço*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Pós- Graduação do Departamento de Engenharia Civil, Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2005.

AMABILI, M.; PAIDOUSSIS, M. Review of Studies on Geometrically Nonlinear Vibrations and Dynamics of Circular Cylindrical Shells and Panels, with and without Fluid–Structure Interaction. *Applied Mechanics Reviews*. v. 56, n.1, p. 349–381, 2003.

ANTOULAS, A. C. Approximation of Large-Scale Dynamical Systems (Advances in Design and Control). *In - Society for Industrial and Applied Mathematics*, Philadelphia, 2005.

AOYAMA, Y.; YAGAWA, G. Component Mode Synthesis for Large-Scale Structural Eigenanalysis. *Computers & Structures*, v. 79, n. 6, p. 605–615, 2001.

BAI, Z. Krylov Subspace Techniques for Reduced-Order Modeling of Large-Scale Dynamical Systems. *Applied Numerical Mathematics*, v. 43, p. 9-44, 2002.

BANDAN, M. A. B. C. *Caracterização Experimental e Modelagem no Comportamento Vibratório de Estruturas Submersas*, Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica), - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2010.

BARBIERI, N.; BARBIERI, R.; SOUZA JÚNIOR, O. H. D. Análise Dinâmica de Sistemas Mecânicos Através de Modelos Reduzidos. In - 22nd IBERIAN LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, 2ND BRAZILIAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL MECHANICS, Campinas, 2001.

BARBIERI, N.; DE SOUZA JÚNIOR, O. H.; BARBIERI, R. Dynamical Analysis Of Transmission Line Cables. Part 1—Linear Theory. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 18, n. 3, p. 659-669, 2004.

BARKANOV, E. *Introduction to the Finite Element Method. Institute of Materials and Structures*, Faculty of Civil Engineering, Riga, 2001.

BAMPTON, M. C. C.; CRAIG JR. R. R. Coupling of Substructures for Dynamic Analyses. *AIAA J*., v. 6. P. 1313-1319, 1968.

BATHE, K. J.; *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, PrenticeHall,Inc.,1996.

BATHE, K-J.; DVARKIN, E. N. Short Communication a Four-Node Plate Bending Element Based on Mindlin/Reissner Plate Theory and a Mixed Interpolation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 21, p. 367-383, 1985.

BATHE, K-J.; RAMM, E.; WILSON, E. L. Finite Element Formulations for Large Deformation Dynamic Analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 9, p. 353-386, 1975.

BORGES, R. A., *Contribuição aos Estudos dos Absorvedores Dinâmivos de Vibrações Não-Lineares.* Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, 2008.

BORRI, M.; MERLINE, T. A Large Displacement Formulation for Anisotropic Beam Analysis. *Meccanica,* v. 21, n.1, p. 30-37, 1986.

BUSHARD, L. B. On the Value of Guyan Reduction in Dynamic Thermal Problems. *Computers & Structures*, v. 13, n. 4,p. 525–531, 1981.

BOTTO, D.; ZUCCA, S.; GOLA, D M. M. Reduced-Order Models for the Calculation of Thermal Transients of Heat Conduction/ Convection FE Models. *Journal of Thermal Stresses*, v. 30, n. 8, p. 819–839, 2007.

CARDONA, A.; NIGRO, N.; SONZOGNI, V.; STORTI, M. Mode Shape Expansion from Data-Based System Identification Procedures. *Mecánica Computacional*, v. 25, p. 1593-1602, 2006.

CASTRO, L. M. S. S. Análise de Vigas em Fundação Elástica.. Disponível em: http://www.civil.ist.utl.pt/~luis/textos/vigas.pdf. Acesso em 10/12/2012.

CHEN, S. H.; YANG, X. W. Extended Kirsch Combined Method for Eigenvalue Reanalysis. *AIAA J*, v. 38, p. 927–30, 2000.

CHO, M.; BAEK, S.; KIM, H.; KIM, K. O. Structural System Identification Using Iterative Improved Reduced System. In - 48th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC STRUCTURES, STRUCTURAL DYNAMICS, AND MATERIALS CONFERENCE, 2007.

CHOI, D. S.; KIM, H. G.; CHO, M. H. Iterated Improved Reduced System (IIRS) Method Combined with Sub-Structuring Scheme (II)-Nonclassically Damped Structural Systems. *Transactions of the Korean Society of Mechanical Engineers A*, v. 31, n. 2, p. 221-230, 2007.

CHOPRA, A. K. *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1995.

CAUGHEY, T. K.; VIJAYARAGHAVAN, A. Free and Forced Oscillations of a Dynamic System with Linear Hysteretic Damping, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, v. 5, p. 533–555, 1970.

DAS, A. S.; DUTT, J. K. Reduced Model of a Rotor-Shaft System Using Modified SEREP. *Mechanics Research Communications*, v. 35, n. 6, p. 398-407, 2008.

___A Reduced Rotor Model Using Modified SEREP Approach for Vibration Control of Rotors. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 26, p. 167-180, 2012.

De LIMA, A. M.G.; BOUHADDI, N.; RADE, D. A.; BELONSI. M. A Time-Domain Finite Element Model Reduction Method for Viscoelastic Linear and Nonlinear Systems. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 12, p. 1182-1201, 2015.

De LIMA, A.M.G.; da SILVA, A.R.; RADE, D.A.; BOUHADDI, N. Component Mode Synthesis Combining Robust Enriched Ritz Approach for Viscoelastically Damped Structures, *Engineering Structures*, v. 32, p. 1479-1488, 2010.

FARIA, A. R. *Simulação de Viga Flexíveis Contendo Atuadores Piezelétricos*. Dissertação (Mestrado Engenharia Aeronáutica e Mecânica), Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São Paulo, 1995.

FARIA, A.W. *Modelagem por Elementos Finitos de Placas Compostas Dotadas de Sensores e Atuadores Piezoelétricos: Implementação Computacional e Análise Numérica*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2006.

FENNER, R. T. *Finite Element Methods for Engineers*. Imperial College Press, London, 1996.

FERREIRA, A. J. M., *MATLAB Codes for Finite Element Analysis, Solid Mechanics and its Applications*, Springer, Portugal, 2007.

FRISWELL, M. I. The Convergence of the Iterated IRS Method. *Journal of Sound and Vibration*, v. 211, n.1, p. 123–132, 1998.

FRISWELL, M.I., GARVEY, S.D., PENNY, J. E. T. Model reduction using dynamic and iterated IRS techniques. *Journal of Sound and Vibration*, v. 186, p. 311–323, 1995.

FRISWELL, M. I.; PENNY, J. E. T.; GARVEY, S. D. The Application of the IRS and Balanced Realization Methods to Obtain Reduced Models of Structures with local Non-Linearity's. *Journal of Sound and Vibration*, v. 196, n.4, p. 453-468, 1996.

GAVIN, H. P. Numerical Integration in Structural Dynamics, *Structural Dynamics*, Department of Civil e Environmental Engineering, Duke University, 2014.

GERGES, Y. *Méthods de Réduction de Modéles en Vibroacoustique non-linéaire*. Tese (Doutorado) – École Doctorale Sciences pour I'Ingénieur et Microtechniques, Université de France, Comté, 2013.

GONÇALVES, I. H. Análise de Deformações em Vigas com Comportamento Geometricamente Não-Linear. – Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) Universidade Federal De Itajubá - Instituto de Engenharia Mecânica Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. Itajubá, 2006.

GORDIS, J. H. An Analysis of the Improved Reduced System (IRS) Model Reduction Procedure. In - 10th INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE, v. 1, p. 471-479, 1992.

GUYAN, R. J. Reduction of Stiffness and Mass Matrices, *AIAA Journal*, v. 3, p. 380, 1965.

IRONS, B. M. Structural Eigenvalue Problems: Elimination of Unwanted Variables. *AIAA Journal*, v. 3, n. 5, p. 961–962, 1965.

KAMMER, D. C. Test-analysis model development using an exact modal reduction. *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, v. 2, n.4, p. 174-179, 1987.

KERSCHEN, G.; WORDEN, K.; VAKAKIS, A. F.; GOLINVAL, J. C. Past, Present and Future of Nonlinear System Identification in Structural Dynamics, *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 20, p. 505-592, 2006.

KIRSCH, U. Reduced Basis Approximations of Structural Displacements for Optimal Design. *J. AIAA*, v. 29, p. 1751 – 1758, 1991.

___. Design-Oriented Analysis of Structures. *Solid Mechanics and Its Applications*, 2002

___. Approximate Vibration Reanalysis of Structures. *AIAA J*, v. 41, p. 504–11, 2003.

KIRSCH, U.; BOGOMOLNI, M., Procedures for Approximate Eigenproblem Reanalysis of Structures. *IJNME*, v. 60, p.1969–86, 2004.

KIRSCH, U.; BOGOMOLNI, M.; SHEINMAN, I. Nonlinear Dynamic Reanalysis of Structures by Combined Approximations. *Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering*, v. 195, n. 33, p. 4420–4432, 2006.

KOUTSOVASILIS, P.; BEITELSCHMIDT, M. Comparison of Model Reduction Techniques for Large Mechanical Systems, *Multibody System Dynamics*, v. 20, n. 2, p. 111–128, 2008.

LAW, S. S.; BU, J. Q.; ZHU, X. Q.; CHAN, S. L. Vehicle Axle Loads Identification Using Finite Element Method. *Engineering Structures*, v. 26, n.8, p.1143-1153, 2004.

LIMA JR, J.J. Modelagem de Sensores e Atuadores Piezelétricos com Aplicações em Controle Ativo de Estruturas. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica), Faculdade de Engenharia Mecânica - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1999.

LULF, A, F. *An Integrated Method for the Transient Solution of Reduced Order Models of Geometrically Nonlinear Structural Dynamic Systems*. Thèse De Doctorat, École Doctorale du Conservatoire National des Arts et Métiers, Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés. French, 2013

MINDLIN, R. D., Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates, *Journal of Applied Mechanics*, v. 18, p. 31-38. 1951.

NACHTERGAELE, P.; RIXEN, D. J.; STEENHOEK, A. M. Efficient Weakly Coupled Projection Basis for The Reduction of Thermo Mechanical Models. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 234, n. 7, p. 2272–2278, 2010.

NAYFEH, A. H.; PAI, P. F. *Linear and Nonlinear Structural Mechanics*, Wiley-Interscience, New York, 2004.

NAYFEH, A. H.; MOOK, D. T. *Nonlinear Oscillations*, Wiley-Interscience, New York, 1979

O'CALLAHAN, J. C. A Proccedure for an Improved Reduced System (IRS) Model, *7º International Modal Analysis Conference*, Las Vegas, Nevada, 1989.

OÑATE, E. *Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos – Análisis Estático Lineal*. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería Barcelona, 1995.

PAPADOPOULOS, M.; GARCIA, E. Improvement In Model Reduction Schemes Using The System Equivalent Reduction Expansion Process. *AIAA Journal*, v. 34, n. 10, p. 2217-2219, 1996.

QU, Z.-Q.. *Model Order Reduction Techniques: With Application in Finite Element Analysis*. SPRINGER, USA, 2004.

RAND, R. *Lecture Notes on Nonlinear Vibrations*, Cornell, 2003.

RAO, S.S. *Vibrações Mecânicas*, Pearson Prentice Hall, São Paulo, 4ª edition, 2008.

REDDY, J. N. *An Introduction to the Finite Element Method*. McGraw-Hill, 1993.

REISSNER, E. *On the Theory of Bending of Elastic Plates*. *J. Math. Physics*, v.23, p.184, 1944

RICHARDS, C.M.; SINGH, R. Characterization of Rubber Isolator Nonlinearities in the Context Of Single- And Multi-Degree-of-Freedom Experimental Systems. *Journal of Sound and Vibration*, v. 247, p. 807–834, 2001.

ROCHA, T. L da. Modelagem de Estruturas Inteligentes. Dissertação (Mestrado), Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2004.

RONG, F.; CHEN, S. H.; CHEN, Y. D. Structural Modal Reanalysis for Topological Modifications with Extended Kirsch Method. *Comput Methods Appl Mech Eng*, v.192, p. 697–707, 2003.

SALIBA, S. S. *Implementação Computacional e Análise Crítica de Elementos Finitos de Placas*. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil, 2007.

SANCHES, L. C. F., *Uma Resolução de Placas com a Teoria de Mindlin Atraves do Metodo dos Elementos de Contorno*. Dissertação (Mestrado), Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, UNICAMP, 1998.

SASTRY, C. V. C.; MAHAPATRA, D. R.; SOPALAKRISHNAN, S.; RAMAMURTHY, T. S. An Iterative System Equaçãouivalent Reduction Expansion Process for Extraction of High Frequency Response From Reduced Order Finite Element Model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, p. 192 , n. 15, p. 1821-1840, 2003.

SIMÕES, N. D. M.; *Grandes Deslocamentos na Flexão de Vigas*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica), Universidade de Aveiro, 2011

SINDLER, J.; SULITKAYU, M. Krylov Subspace Model Order Reduction of Large Scale Finite Element Dynamical Systems. *MM Science Journal*, v.3, pp:428-433, 2013

SORIANO, H. L. *Método de Elementos Finitos em Análise de Estruturas*. USP, 1ª Ed. São Paulo, 2003.

THOMSEN, J.J., *Vibrations and Stability*, Springer-Verlag, 2ª Edition, 2003.

VERHULST, F., *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer, 2ª Ed. Berlin, 1999.

WHITE, S. W.; KIM, S. K.; BAJAJ, A. K.; DAVIES, P.; SHOWERS, D. K.; LIEDTKE, P. E. Experimental Techniques and Identification of Nonlinear and Viscoelastic Properties of Flexible Polyurethane Foam, *Nonlinear Dynamics*, v. 22, p. 281–313, 2000.

UGURAL, A. C. *Stress in Plates and Shells*, Mc Graw-Hill Book Company, 1981.

XIA, Y., LIN, R. Improvement on the Iterated IRS Method for Structural Eigensolutions. Journal of Sound and Vibration, v. 270, n. 4, p. 713-727, 2004.

YU, H.; LI, P.; DING, C.; SUN, C.; GUO, X.; ZHANG, F.; ZHOU, Y.; YU, Z. Krylov Subspace Based Model Reduction Method for Transient Simulation of Active Distribution Grid, *Power and Energy Society General Meeting (PES), IEEE*, 2013.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; ZHU, J. Z. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. Elsevier, Barcelona, 6ª Ed, 2005.